

**Войтов А.В.**

Харьковский национальный техниче-  
ский университет сельского хозяйства  
им. П.Василенко,  
г. Харьков, Украина  
**E-mail:** K1kavoitov@gmail.com

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ  
В ТРИБОСИСТЕМАХ В УСЛОВИЯХ  
ГРАНИЧНОЙ СМАЗКИ**

УДК 621.891

*Войтов А.В. «Розробка математичної моделі стаціонарних процесів в трибосистемах в умовах граничного мащення»*

Обґрунтовано методичний підхід в моделюванні стаціонарних процесів в трибосистемі в умовах граничного змащення, де вхідними потоками виступають: добротність трибосистеми, яка характеризує вхідний потік - матерія; швидкість роботи дисипації в трибосистемі, яка характеризує вхідний потік - енергія; межа стійкості трибосистеми, яка характеризує вхідний потік - інформація.

Отримано математичні вирази для моделювання об'ємної швидкості зношування і коефіцієнта тертя на стаціонарних режимах роботи трибосистем (після завершення припрацювання). Виконана експериментальна оцінка адекватності розроблених математичних моделей результатами експерименту. Проведено трьохфакторний експеримент з оцінкою відповідності масиву експериментальних даних нормальному закону розподілу. Розраховані значення критерію Кохрена, які підтверджують відтворюваність і повторюваність результатів експерименту від досвіду до досвіду. За допомогою критерію Фішера виконана оцінка адекватності результатів математичного моделювання з експериментальними даними, показано, що результати моделювання об'ємної швидкості зношування і коефіцієнта тертя адекватні результатами експерименту з довірчою ймовірністю 0,9. Розрахована похибка моделювання по кожній серії експериментів, показано, що при моделюванні об'ємної швидкості зношування похибка не перевищує 10,3%, при моделюванні коефіцієнта тертя – 11,5%.

Отримано математичні вирази, які дозволяють моделювати коливання об'ємної швидкості зношування і коефіцієнта тертя в процесі роботи трибосистеми на стаціонарному режимі. Це дозволяє врахувати освіту і зношування поверхневих плівок на робочих поверхнях тертя і підвищити точність розрахунків на тертя і знос.

**Ключові слова:** трибосистема, математична модель, стаціонарні процеси, добротність трибосистеми, швидкість роботи дисипації, коливальність процесу, об'ємна швидкість зношування, коефіцієнт тертя.

*Войтов А.В. «Разработка математической модели стационарных процессов в трибосистемах в условиях граничной смазки»*

Обоснован методический подход в моделировании стационарных процессов в трибосистемах в условиях граничной смазки, где входными потоками выступают: добротность трибосистемы, которая характеризует входной поток – материя; скорость работы диссипации в трибосистеме, которая характеризует входной поток – энергия; граница устойчивости трибосистемы, которая характеризует входной поток – информация.

Получены математические выражения для моделирования объемной скорости изнашивания и коэффициента трения на стационарных режимах работы трибосистем (после завершения приработки). Выполнена экспериментальная оценка адекватности разработанных математических моделей результатам эксперимента. Проведен трехфакторный эксперимент с оценкой соответствия массива экспериментальных данных нормальному закону распределения. Рассчитаны значения критерия Кохрена, которые подтверждают воспроизводимость и повторяемость результатов эксперимента от опыта к опыту. С помощью критерия Фишера выполнена оценка адекватности результатов математического моделирования экспериментальным данным, показано, что результаты моделирования объемной скорости изнашивания и коэффициента трения адекватны результатам эксперимента с доверительной вероятностью 0,9. Рассчитана ошибка моделирования по каждой серии экспериментов, показано, что при моделировании объемной скорости изнашивания ошибка не превышает 10,3%, при моделировании коэффициента трения – 11,5%.

Получены математические выражения, которые позволяют моделировать колебания объемной скорости изнашивания и коэффициента трения в процессе работы трибосистемы на стационарном режиме. Это позволяет учесть образование и изнашивание поверхностных пленок на рабочих поверхностях трения и повысить точность расчетов на трение и износ.

**Ключевые слова:** трибосистема, математическая модель, стационарные процессы, добротность трибосистемы, скорость работы диссипации, колебательность процесса, объемная скорость изнашивания, коэффициент трения

*Voitov A.V. «Development of a mathematical model of stationary processes in tribosystems under boundary lubrication conditions»*

The methodical approach in modeling stationary processes in tribosystems under boundary lubrication conditions is substantiated, where the input flows are: tribosystem quality factor, which characterizes the input flow - matter; the speed of dissipation in tribosystem, which characterizes the input flow - energy; the stability limit of the tribosystem, which characterizes the input stream - information. The target simulation function is the volumetric wear rate,  $I$ ,  $m^3$ /hour and friction losses, which are determined by the friction coefficient  $f$ . Mathematical model - exponential dependence, which connects the input stream - matter, energy and information with an output stream - wear rate and friction coefficient.

Mathematical expressions are obtained for modeling the volumetric wear rate and friction coefficient for stationary modes of operation of tribosystems (after completing the run-in). An experimental assessment of the adequacy of the developed mathematical models to experimental results has been performed. A three-factor experiment was carried out with an assessment of the compliance of the experimental data array with the normal distribution law. The values of the Cochren criterion are calculated, which confirm the reproducibility and repeatability of the experimental results from experience to experience. Using the Fisher criterion, the assessment of the adequacy of the results of mathematical modeling of experimental data was made, it was shown that the results of modeling the volumetric wear rate and friction coefficient are adequate to the experimental results with a confidence level 0,9. A simulation error was calculated for each series of experiments; it was shown that when modeling the volumetric rate of wear, the error does not exceed 10,3%, when modeling friction coefficient – 11,5%.

Mathematical expressions are obtained that allow modeling the fluctuations of the wear rate and the friction coefficient during the operation of the tribosystem in the stationary mode. This allows us to take into account the formation and wear of surface films on friction working surfaces and to improve the accuracy of calculations for friction and wear, which is a distinctive feature of the model being developed from previously known. The simulation results obtained with regard to the oscillatory component were checked for compliance with the normal distribution law, reproducibility and adequacy, which allows to conclude that the resulting model can act as a tool in tribosystem calculations at the design stage. Accounting for the oscillatory component to improve the accuracy of modeling after completion of the run-in.

**Key words:** tribosystem, mathematical model, stationary processes, tribosystem quality factor, dissipation speed, oscillation process, volumetric wear rate, friction coefficient.

### Актуальность проблемы

Задача разработки математической модели стационарных процессов в трибосистемах (после завершения периода приработки) в условиях граничной смазки относится к задачам стохастического моделирования, т.к. исходные данные для моделирования (конструкция трибосистемы, смазочная среда, материалы из которых изготовлены трибоэлементы, шероховатость поверхностей трения, нагрузочно-скоростной диапазон работы и т.д.) являются случайными функциями. Решения по выбору конструкции трибосистемы, смазочной среды и режимов эксплуатации принимаются конструктором на этапе проектирования машины и базируются на опыте решения таких задач. При этом, эффективность процесса выбора оптимальной конструкции трибосистемы определяется, с одной стороны, совокупностью используемых принципов и методов решения конструкторских задач, связанных с обеспечением прочности трибоэлементов, с другой стороны – использованием моделей, которые позволяют прогнозировать ресурс и потери на трение проектируемых трибосистем. Такие модели являются на сегодняшний день эффективными средствами принятия рациональных решений.

Необходимо отметить, что в организациях, которые занимаются проектированием машин, существуют базы данных, которые позволяют осуществлять сбор и анализ информации по проектированию и эксплуатации различных конструкций трибосистем и их применение в последующих конструкциях.

В последнее время активно развиваются методы расчета и моделирования процессов трения и изнашивания в трибосистемах машин и механизмов, что позволяет значительно снижать затраты в процессе проектирования и доводки новых конструкций.

### Анализ последних исследований

При разработке моделей по расчету износа и прогнозированию ресурса используют в основном вероятностные подходы [1–5]. Построение таких моделей базируется на расчетах характеристик фактического пятна контакта (ФПК) и методах описания шероховатости поверхности [6].

В работе [7] дается анализ современного состояния методов расчета износа и прогнозирования ресурса и делается вывод, что аналитические методы не позволяют учитывать динамику изменения режимов работы контакта, а перспективными представляются численные методы.

Автором работы [8] предложено описывать износ массивом векторов вероятностей величин износа дискретных точек поверхности, которые моделируются нестационарными случайными функциями марковского типа, а износ оценивается математическим ожиданием вероятности нахождения элементов поверхности в некотором состоянии. Форма изношенной поверхности определяется с помощью кубической сплайн-аппроксимации математических ожиданий износа в точках расположения моделируемых элементов.

В работе [9] приведены теоретические исследования по обоснованию методики моделирования стационарных процессов трения и изнашивания в трибосистемах в условиях граничной смазки. Авторами разработана методика моделирования характеристик ФПК и математическая модель скорости работы диссипации в трибосистеме, которые позволяют моделировать скорость объемного изнашивания и коэффициент трения на стационарных режимах. В дальнейшей работе [10] представлены теоретические и экспериментальные зависимости, полученные с помощью разработанной модели и приведена ошибка моделирования, которая составляет для скорости изнашивания - 14,03%, для коэффициента трения – 12,8%, что по мнению авторов, можно признать удовлетворительным при исследовании процессов трения и изнашивания.

Понятие добротности трибосистемы было введено в математическую модель стационарных процессов авторами работы [11], а затем дополнено в работе [12] и определено как способность сопрягаемых материалов в трибосистеме (смазочная среда и реологические свойства структуры материалов подвижного и неподвижного трибоэлементов) превращать работу сил трения в тепловую энергию, тем самым препятствовать запасам энергии в поверхностных слоях трибоэлементов, которые можно оценить деформируемым объемом.

Анализируя накопленный опыт при решении подобных задач можно сделать вывод, что разработка математических моделей и методов расчета скорости изнашивания и коэффициента трения без предварительных тестовых экспериментов является актуальной задачей.

### Формулирование цели исследования

Обобщая изложенное выше, научное направление данной работы состоит в дальнейшем развитии методов моделирования стационарных процессов в трибосистемах в условиях граничной смазки, где входными потоками будут выступать добротность трибосистемы, скорость работы диссипации в трибосистеме и граница устойчивости трибосистемы.

Целевой функцией моделирования стационарных процессов в трибосистемах в условиях граничной смазки будет выступать объемная скорость изнашивания  $I$ , м<sup>3</sup>/час и потери на трение, которые определяются коэффициентом трения  $f$ . Математическая модель – экспоненциальная зависимость, которая связывает входной поток - материя,

энергия и информация с выходным потоком – скоростью изнашивания и коэффициентом трения.

Отличительной особенностью разрабатываемой модели стационарных процессов в трибосистемах от ранее известных, является наличие в модели случайной составляющей, которая выражается в колебании величины скорости изнашивания и коэффициента трения во время эксплуатации (работы) трибосистемы. Учет колебательной составляющей повысить точность моделирования после завершения приработки.

### Методический подход в проведении исследований

При разработке математической модели стационарных процессов в трибосистемах были приняты следующие допущения.

1. Контакт поверхностей трения подвижного и неподвижного трибоэлементов дискретный, пятна контакта равномерно распределены по площади трения, взаимодействие выступов шероховатостей случайно, вид контакта на единичном пятне – упругий.

2. Температура, которая генерируется на фактических пятнах контакта, не изменяет модуль упругости и коэффициент Пуассона материалов трибоэлементов.

3. По характеру протекающих процессов трения и изнашивания рассматриваются установившиеся режимы, т.е. после завершения приработки.

Ограничения, принятые при разработке математической модели.

Трибосистема функционирует в режиме граничной смазки в нагрузочно-скоростном диапазоне, где не возникает повреждаемости поверхностей трения, при этом, энергии активации достаточно для перестройки поверхностных слоев.

Согласно работе [12] добротность трибосистемы можно оценить по выражению:

$$Q = \frac{K_{\phi}^2 \cdot a_{np} \cdot E_y}{\dot{\epsilon}_{np}} \cdot \sqrt{\frac{\delta_n \cdot \delta_n}{\pi}}, \text{ Дж} / \text{ м}^3, \quad (1)$$

где  $K_{\phi}$  - параметр, который учитывает геометрические размеры трибосистемы, коэффициент формы, согласно работы [12] рассчитывается по формуле:

$$K_{\phi} = \frac{F_{\min}}{V_n + \frac{V_n \cdot F_{\max}}{F_{\min}}}, \frac{1}{\text{ м}}, \quad (2)$$

где  $F_{\min}$  – площадь трения неподвижного трибоэлемента,  $\text{ м}^2$ ;

$V_n$  – объем материала, находящийся под площадью трения подвижного трибоэлемента,  $\text{ м}^3$ ;

$V_n$  – объем материала, находящийся под площадью трения неподвижного трибоэлемента,  $\text{ м}^3$ ;

$F_{\max}$  – площадь трения подвижного трибоэлемента,  $\text{ м}^2$ .

Значимыми параметрами также являются: температуропроводность материалов трибоэлементов  $a$ ,  $\text{ м}^2/\text{ с}$  и скорость деформации в данных материалах  $\dot{\epsilon}$ ,  $1/\text{ с}$ .

Учитывая то, что в трибосистеме одновременно участвуют в работе подвижный и неподвижный трибоэлемент, используем понятия приведенных значений.

Приведенный коэффициент температуропроводности материалов трибосистемы определим по выражению:

$$a_{np} = \frac{2a_n \cdot a_n}{a_n + a_n}, \text{ м}^2 / \text{ с} \quad (3)$$

где  $a_n$  и  $a_n$  – коэффициенты температуропроводности материалов подвижного и неподвижного трибоэлементов, справочная величина,  $\text{ м}^2/\text{ с}$ .

Трибологические свойства смазочной среды, согласно работы [13], можно учитывать с помощью параметра,  $E_y$ ,  $\text{ Дж}/\text{ м}^3$  – удельная работа изнашивания единицы объема

тестового матеріала (шарики из стали ШХ-15) в испытываемой смазочной среде.

Приведенную скорость деформации в подповерхностных слоях материалов трибосистемы, согласно работы [9], определим по выражению:

$$\dot{\epsilon}_{np} = \frac{2\dot{\epsilon}_n \cdot \dot{\epsilon}_n}{\dot{\epsilon}_n + \dot{\epsilon}_n}, 1/c \quad (4)$$

где  $\dot{\epsilon}_n$ ,  $\dot{\epsilon}_n$  – скорость деформации материалов подвижного и неподвижного трибоэлементов, 1/с.

На основании работы [9]:

$$\dot{\epsilon}_n = 75(1 + \mu_n)(0,86 - 1,05 \mu_n) \frac{\sigma_{фнк} \cdot v_{скл}}{E_n \cdot d_{фнк}}, 1/c, \quad (5)$$

$$\dot{\epsilon}_n = 75(1 + \mu_n)(0,86 - 1,05 \mu_n) \frac{\sigma_{фнк} \cdot v_{скл}}{E_n \cdot d_{фнк}}, 1/c, \quad (6)$$

где  $\mu_n$  и  $\mu_n$  – коэффициенты Пуассона материалов подвижного и неподвижного трибоэлементов, справочная величина;

$\sigma_{фнк}$  – напряжение на фактическом пятне контакта, рассчитывается по формуле, представленной в работе [9], Па;

$v_{скл}$  – скорость скольжения, м/с;

$E_n$  и  $E_n$  – модуль упругости материалов подвижного и неподвижного трибоэлементов, справочная величина, Па;

$d_{фнк}$  – диаметр фактического пятна контакта, м<sup>2</sup>, рассчитывается по формуле представленной в работе [9], Па.

Структура сопряженных материалов в трибосистеме, согласно работе [14], учитывается значениями  $\delta_n$  и  $\delta_n$  – коэффициенты затухания ультразвуковых колебаний в структуре материала подвижного и неподвижного трибоэлементов, безразмерные величины. Данные коэффициенты прямо пропорциональны внутреннему трению структуры сопряженных материалов.

Как следует из приведенных выражений (1)-(6) добротность трибосистемы это количественный параметр, который характеризует конструкцию трибосистемы параметром  $K_\phi$ , температуропроводность материалов трибоэлементов –  $a_{np}$ , структуру сопряженных материалов - (внутреннее трение  $\delta_n$  и  $\delta_n$ ), трибологические свойства смазочной среды –  $E_y$ , а также скорость деформации в поверхностных слоях трибоэлементов – ( $\dot{\epsilon}_n$ ,  $\dot{\epsilon}_n$ ), которая зависит от шероховатости поверхностей трения и модуля упругости материалов трибоэлементов – ( $E_n$  и  $E_n$ ).

Добротность трибосистемы  $Q$  определяет входной поток – материя.

Под входным потоком энергия, будем понимать параметр – скорость работы диссипации в трибосистеме  $W_{TP}$ , которая, согласно работы [9], количественно оценивается следующими выражениями:

$$W_{TP} = W_{TP,n} + W_{TP,n}, \text{ Вт}, \quad (7)$$

$$W_{TP,n} = P_n \cdot n, \text{ Вт}, \quad (8)$$

$$W_{TP,n} = P_n \cdot n, \text{ Вт}, \quad (9)$$

где  $W_{TP,n}$  и  $W_{TP,n}$  – скорость работы диссипации в подвижном и неподвижном трибоэлементах, Дж/с;

$n$  – количество пятен контакта на поверхности трения, определяется согласно работы [9];

$P_n$ ,  $P_n$  - скорость работы диссипации в подвижном и неподвижном трибоэлементах на единичном фактическом пятне контакта определяется по выражениям, которые приведены в работе [9]:

$$P_n = \sigma_{фнк} \dot{\epsilon}_n V_{он}, \text{ Дж/с=Вт}, \quad (10)$$

$$P_n = \sigma_{фнк} \dot{\epsilon}_n V_{дн}, \text{ Дж/с=Вт}, \quad (11)$$

где  $V_{дн}$ ,  $V_{дн}$  – объемы материала единичного ФПК подвижного и неподвижного трибоэлементов, которые участвуют в деформации,  $\text{м}^3$ , определяется согласно работы [9].

Скорость работы диссипации в трибосистеме  $W_{TP}$ , формула (7), является энергетическим параметром и характеризует скорость процессов превращения механической энергии в тепловую, так как величина напряжений в материале  $\sigma_{фнк}$ , объемы материалов, которые участвуют в деформации  $V_{дн}$ ,  $V_{дн}$  и скорость деформации в поверхностных слоях материалов  $\dot{\epsilon}_n$ ,  $\dot{\epsilon}_n$  влияют на «загруженность» трибоэлементов в трибосистеме и зависят от нагрузки  $N$ ,  $N$  и скорости скольжения  $v_{скл}$ ,  $\text{м/с}$ .

Под входным потоком - информация будем понимать параметр, который характеризует наличия знаний о границе устойчивости трибосистемы, т.е. величину мощности  $W_{max}$ , при которой начинается ускоренный режим изнашивания или наступает задир. Мощность, которая подводится к трибосистеме, определяется по выражению:

$$W_i = N \cdot v_{скл}, H \cdot \frac{M}{c} = Bm \quad (12)$$

где  $N$  – нагрузка на трибосистему,  $H$ ;

$v_{скл}$  – скорость скольжения,  $\text{м/с}$ .

Подставив в выражение (12) максимально возможные значения нагрузки  $N_{max}$  или скорости скольжения  $v_{скл,max}$ , можно определить границу устойчивости трибосистемы.

### Результаты исследований

Базовым подходом к определению параметров математической модели стационарных процессов в трибосистемах в условиях граничной смазки является метод наименьших квадратов. Основываясь на анализе работ, посвященных моделированию стационарных процессов в трибосистемах, целевую функцию скорости изнашивания и коэффициента трения будем определять на основании экспериментальных данных.

Экспериментальные исследования проводили в виде трехфакторного эксперимента с последующим расчетом статистических характеристик.

Математическое описание зависимостей  $I$  и  $f$  базируется на основе математических моделей множественной регрессии от следующих трех факторов.

1. Добротность трибосистемы -  $Q$ ,  $\text{Дж/м}^3$ .

2. Скорость работы диссипации в трибосистеме -  $W_{TP}$ ,  $\text{Дж/с}$ .

3. Внешнее воздействие на трибосистему  $W_i = N \cdot v$ ,  $H \cdot \text{м/с}$ , которое выражается в виде произведения нагрузки,  $H$ , на скорость скольжения,  $\text{м/с}$ . Однако при моделировании целесообразно использовать безразмерный параметр –  $W_i/W_{зад}$ . Данный фактор определяет отношение действующего значения мощности трения к величине мощности трения, при которой наступает задир (потеря устойчивости трибосистемы).

При поиске математического выражения, которое описывает изменение коэффициента трения на стационарном режиме, в качестве фактора – добротность трибосистемы  $Q$ ,  $\text{Дж/м}^3$ , учитывали безразмерный параметр –  $Q_i/Q_{max}$ . Данный фактор определяет отношение начального значения добротности трибосистемы перед приработкой  $Q_i$ , к величине добротности после завершения приработки  $Q_{max}$ . Причиной увеличения добротности является формирование поверхностных слоев у материалов трибоэлементов, которые отличаются от исходных, что вызывает изменение скорости деформации материалов подвижного и неподвижного трибоэлементов  $\dot{\epsilon}$ .

План-матрица охватывает различные конструкции трибосистем «кольцо-кольцо»,  $K_{\phi} = 12,5 \text{ 1/м}$ ,  $F_{min} = 0,00015 \text{ м}^2$ ,  $F_{max} = 0,0003 \text{ м}^2$ . Сочетание материалов в трибосистемах

определялось следующими вариантами: сталь 40X+сталь 40X; сталь 40X+серый чугун (СЧ); сталь 40X+Бр.АЖ 9-4; СЧ+СЧ; СЧ+Бр.АЖ 9-4.

В качестве смазочных материалов выбраны следующие гидравлические и трансмиссионные масла [13]: гидравлическая жидкость МГ-15-В,  $E_y = 2,437 \cdot 10^{14}$  Дж/м<sup>3</sup>; трансмиссионное масло ТСп-10 GL-4,  $E_y = 3,64 \cdot 10^{14}$  Дж/м<sup>3</sup>; трансмиссионное масло ТСп-15к GL-4,  $E_y = 4,185 \cdot 10^{14}$  Дж/м<sup>3</sup>; трансмиссионное масло ТАД-17и GL-5,  $E_y = 6,369 \cdot 10^{14}$  Дж/м<sup>3</sup>; трансмиссионное масло VALVOLINE GL-5,  $E_y = 7,484 \cdot 10^{14}$  Дж/м<sup>3</sup>.

Такой выбор смазочных материалов объясняется большим изменением значений интегрального показателя  $E_y$ .

Поверхности трения подвижных и неподвижных трибоэлементов перед испытаниями имели одинаковую шероховатость:  $Ra = 0,2$  мкм;  $Sm = 0,4$  мм, которая воспроизводилась шлифованием перед каждым опытом. В процессе проведения эксперимента методом искусственных баз регистрировали суммарный линейный износ подвижного и неподвижного трибоэлементов и с учетом площади трения рассчитывали объемную скорость изнашивания  $I_{\Sigma}$ , м<sup>3</sup>/ч. Коэффициент трения  $f_{\Sigma}$  рассчитывали по измеренным значениям момента трения на установившемся режиме (после завершения приработки).

### Анализ результатов исследования

По результатам экспериментальных значений с помощью метода наименьших квадратов были получены регрессионные уравнения в натуральных значениях, которые имеют следующий вид:

-для объемной скорости изнашивания трибосистемы:

$$I = \frac{72 \cdot W_{TP}}{Q_{\max}} \cdot \exp\left(\frac{W_i}{W_{\text{зад}}}\right), \text{ м}^3 / \text{ час}, \quad (13)$$

где  $Q_{\max}$  – добротности трибосистемы после завершения приработки.

Для коэффициента трения:

$$f = \frac{W_{TP}}{2,18 \cdot W_i} \cdot \exp\left(\frac{Q_i}{Q_{\max}}\right). \quad (14)$$

Для моделирования объемной скорости изнашивания подвижного, более твердого трибоэлемента трибосистемы, согласно формулы (13), можно записать следующее выражение:

$$I_n = \frac{72 \cdot W_{TP,n}}{Q_{\max}} \cdot \exp\left(\frac{W_i}{W_{\text{зад}}}\right), \text{ м}^3 / \text{ час}. \quad (15)$$

Для моделирования объемной скорости изнашивания неподвижного, более мягкого трибоэлемента можно записать следующее выражение:

$$I_n = \frac{72 \cdot W_{TP,n}}{Q_{\max}} \cdot \exp\left(\frac{W_i}{W_{\text{зад}}}\right), \text{ м}^3 / \text{ час}. \quad (16)$$

Сумма объемной скорости изнашивания подвижного  $I_n$ , формула (15) и неподвижного  $I_n$ , формула (16) определяет объемную скорость изнашивания трибосистемы, которая соответствует, на основании выражения (7), формуле (13).

Объем выборки по измерению объемной скорости изнашивания и коэффициента трения при проведении экспериментальных исследований был проверен на соответствие нормальному закону распределения по методике согласно работе [15].

Среднеквадратическое абсолютное отклонение для объемной скорости изнашивания:

$$CAO = \sum |I_i - I_{cp}| / n \quad (17)$$

- для коэффициента трения:

$$CAO = \sum |f_i - f_{cp}| / n \quad (18)$$

где  $I_i$  и  $f_i$  - текущее значение объемной скорости изнашивания и коэффициента трения;

$I_{cp}$  и  $f_{cp}$  - среднее значение объемной скорости изнашивания и коэффициента трения;

$n$  - количество опытов, согласно плана эксперимента с учетом трех повторов,  $n = 75$ .

Для выборки, имеющей нормальный закон распределения, справедливо выражение:

$$\left| \frac{CAO}{S} - 0,7979 \right| < \frac{0,4}{\sqrt{n}} \quad (19)$$

где  $S$  – среднеквадратическое отклонение, определяемое по формуле [15]:

- для объемной скорости изнашивания:

$$S_I = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_i - I_{cp})^2} \quad (20)$$

- для коэффициента трения:

$$S_f = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_i - f_{cp})^2} \quad (21)$$

Анализ результатов расчетов, приведенных в таблице 1 позволяет сделать вывод, что условие (19) выполняется, т.е. полученный экспериментальный объем выборки соответствует нормальному закону распределения.

Таблица 1

**Результаты расчетов по проверке на соответствие нормальному закону распределения**

Параметр	CAO	Среднее значение	S	$\frac{CAO}{S} - 0,7979$	$\frac{0,4}{\sqrt{n}}$
Скорость изнашивания, $I \cdot 10^{-10}$	5,146	36,542	6,200	0,032	0,046
Коэффициент трения, $f$	0,0166	0,0611	0,0199	0,036	0,046

Результаты экспериментальных исследований согласно плана эксперимента были проверены на однородность и воспроизводимость от опыта к опыту по критерию Кохрена [15]:

$$G_p = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^n S_i^2} \quad (22)$$

где  $S_{\max}^2$  - наибольшее значение дисперсии при измерении скорости изнашивания и коэффициента трения;



$n$  - количество опытов при измерении скорости изнашивания и коэффициента трения;

$S_i$  - значение дисперсии  $i$ -го опыта.

Проверка подлежала гипотеза:

$$G_p < G_{табл} \quad (23)$$

где  $G_{табл}$  – табличное значение критерия Кохрена при заданном уровне значимости 0,95.

При количестве сравниваемых дисперсий  $k=25$  и количестве опытов  $n=75$ , табличное значение критерия Кохрена равно:

$$G_{табл} = 0,0165.$$

Расчетное значение критерия Кохрена, формула (22), равно:

- для скорости изнашивания  $G_p = 0,00905$ ;

- для коэффициент трения  $G_p = 0,00874$ .

Условие (23) выполняется, следовательно, результаты экспериментов при определении объемной скорости изнашивания и коэффициента трения от опыта к опыту воспроизводимы и однородны.

Адекватность теоретических значений, полученных по выражениям (13) и (14) экспериментальным данным была проверена по  $F$ -критерию Фишера. Для этого были рассчитаны дисперсии адекватности и воспроизводимости.

Расчетное значение критерия Фишера  $F$  определяли по формуле:

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2} \quad (24)$$

Табличное значение  $F$ -критерия определялось при степенях свободы равных 72 и 74 и доверительной вероятности  $p=0,9$ ,  $F_{табл}=1,3840$  [15].

Результаты расчетов значений  $F$ -критерия представлены в таблице 2.

Таблица 2

**Результаты расчетов значений  $F$ -критерия**

Параметр	$S_{ад}^2$	$S_y^2$	$F$	$F_{табл}$
Скорость изнашивания $I \cdot 10^{-10}$	1296	998	1,298	1,384
Коэффициент трения $f$	0,0026	0,0019	1,315	1,384

Сравнения расчетного значения критерия  $F$  и табличного  $F_{табл}$  позволяют сделать вывод, что расчетные значения меньше табличных, следовательно, теоретические зависимости (13) и (14) адекватно отображают процессы трения и изнашивания трибосистем в условиях граничной смазки на стационарных режимах и учитывают, в отличие от полученных ранее, добротность трибосистемы и ее способность превращать механическую энергию в тепловую, рассеивая в окружающей среде.

Относительную ошибку моделирования определяли по выражениям:

$$e_I = \left| \frac{I_{экс} - I_M}{I_{экс}} \right| \cdot 100\% \quad (25)$$

$$e_f = \left| \frac{f_{экс} - f_M}{f_{экс}} \right| \cdot 100\% \quad (26)$$

где  $I_{экс}$ ,  $I_m$ ,  $f_{экс}$ ,  $f_m$  – значение скорости изнашивания и коэффициента трения, которые измерены в процессе эксперимента и получены при моделировании.

Анализ теоретических и экспериментальных значений позволяет сделать вывод, что при больших значениях скорости изнашивания, а также коэффициента трения теоретические (расчетные) значения меньше экспериментальных. При малых значениях скорости изнашивания и коэффициента трения, наоборот, теоретически полученные значения больше, чем экспериментальные. При этом ошибка моделирования изменения объемной скорости изнашивания не превышает 10,3%, ошибка моделирования коэффициента трения не превышает 11,2%. При среднем диапазоне изменения значений объемной скорости изнашивания и коэффициента трения наблюдается минимальная ошибка моделирования: для скорости изнашивания 2,9...4,8%; для коэффициента трения 1,5...4,6%. Анализ литературных источников посвященных исследованию процессов трения и изнашивания трибосистем на стационарных режимах позволяет утверждать, что коэффициент трения, после завершения приработки, имеет колебательность. Впервые это было отмечено в работах Б.И.Костецкого, например, [4], что связано с образованием вторичных структур на поверхности трения их изнашиванием и образованием новых вторичных структур. Такой процесс изнашивания имеет колебательный характер с определенной амплитудой и частотой колебаний.

На основании проведенных нами экспериментов в полученные уравнения (13) и (14) были добавлены члены, которые учитывают колебательность процесса.

Для объемной скорости изнашивания трибосистемы:

$$I = \left[ \frac{72 \cdot W_{TP}}{Q_{\max}} \cdot \exp\left(\frac{W_i}{W_{зад}}\right) \cdot A_I (\cos \omega_I t + \sin \omega_I t) \right] \text{ м}^3 / \text{час}, \quad (27)$$

где  $A_I$  – амплитуда колебаний скорости изнашивания относительно среднего значения, безразмерная величина, определяется по выражению:

$$A_I = \frac{0,05}{d_I}, \quad (28)$$

где коэффициент 0,05 получен на основании экспериментальных данных и представляет собой отношение среднеквадратического отклонения величины скорости изнашивания к среднему значению скорости изнашивания;

$d_I$  – декремент затухания колебаний скорости изнашивания, определяется согласно выражения, приведенного в работе [16], безразмерная величина;

$\omega_I$  – циклическая (круговая) частота колебания скорости изнашивания, определяется по выражению:

$$\omega_I = \frac{2\pi}{T_I} \cdot \frac{1}{c}, \quad (29)$$

где  $T_I$  – постоянная времени трибосистемы при изменении скорости изнашивания, характеризует инерционность трибосистемы, определяется согласно выражения, приведенного в работе [16], размерность - секунда;

$t$  – текущее время работы трибосистемы, размерность – секунда.

Для коэффициента трения выражение имеет вид:

$$f = \left[ \frac{W_{TP}}{2,18 \cdot W_i} \cdot \exp\left(\frac{Q_i}{Q_{\max}}\right) \cdot A_f (\cos \omega_f t + \sin \omega_f t) \right], \quad (30)$$

где  $A_f$  – амплитуда колебаний коэффициента трения относительно среднего значения, безразмерная величина, определяется по выражению:

$$A_f = \frac{0,06}{d_f}, \quad (31)$$

где коэффициент 0,06 получен на основании экспериментальных данных и представляет собой отношение среднеквадратического отклонения величины коэффициента трения к среднему значению коэффициента трения;

$d_f$  – декремент затухания колебаний коэффициента трения, определяется согласно выражения, приведенного в работе [16], безразмерная величина;

$\omega_f$  – циклическая (круговая) частота колебаний коэффициента трения, определяется по выражению:

$$\omega_f = \frac{2\pi}{T_f}, \frac{1}{c}, \quad (32)$$

где  $T_f$  – постоянная времени трибосистемы при изменении коэффициента трения, которая характеризует инерционность, определяется согласно выражения, приведенного в работе [16], размерность – секунда.

Использование полученных уравнений (27) и (30) позволяет более точно (с меньшей ошибкой) оценить процесс трения и изнашивания, а также объяснить большую ошибку моделирования по отношению к эксперименту. Результаты моделирования, полученные по выражениям (27) и (30) были проверены на соответствие нормальному закону распределения, воспроизводимость и адекватность по представленным выше формулам (17) – (24), что позволяет сделать вывод, что полученная модель может выступать инструментом в расчетах трибосистем на этапе проектирования.

## Выводы

1. Обоснован методический подход в моделировании стационарных процессов в трибосистемах в условиях граничной смазки, где входными потоками выступают: добротность трибосистемы, которая характеризует входной поток – материя; скорость работы диссипации в трибосистеме, которая характеризует входной поток – энергия; граница устойчивости трибосистемы, которая характеризует входной поток – информация.

2. Получены математические выражения для моделирования объемной скорости изнашивания и коэффициента трения на стационарных режимах работы трибосистем (после завершения приработки). Выполнена экспериментальная оценка адекватности разработанных математических моделей результатам эксперимента. Проведен трехфакторный эксперимент с оценкой соответствия массива экспериментальных данных нормальному закону распределения. Рассчитаны значения критерия Кохрена, которые подтверждают воспроизводимость и повторяемость результатов эксперимента от опыта к опыту. С помощью критерия Фишера выполнена оценка адекватности результатов математического моделирования экспериментальным данным, показано, что результаты моделирования объемной скорости изнашивания и коэффициента трения адекватны результатам эксперимента с доверительной вероятностью 0,9. Рассчитана ошибка моделирования по каждой серии экспериментов, показано, что при моделировании объемной скорости изнашивания ошибка не превышает 10,3%, при моделировании коэффициента трения – 11,5%.

3. Получены математические выражения, которые позволяют моделировать колебания объемной скорости изнашивания и коэффициента трения в процессе работы трибосистемы на стационарном режиме. Это позволяет учесть образование и изнашивание поверхностных пленок на рабочих поверхностях трения и повысить точность расчетов на трение и износ.

Список использованных источников

1. Кузьменко А.Г. Влияние статистической неоднородности, размеров и кинематических условий на износ поверхностей трения, *Трение и износ*. – 1985. – Т.6, № 3. – С. 432-441.
2. Тартаковский И.Б. Корреляционное уравнение износа, *Вестник машиностроения*. – 1968. – № 2. – С. 17-24.
3. Бендерский А.М. Вероятностная модель износа детали, *Надежность и контроль качества*. – 1970. – № 5. – С. 13-24.
4. Костецкий Б.И., Стрельников В.П., Таций В.Г. Марковская модель износа и прогнозирование долговечности изнашиваемых деталей, *Проблемы трения и изнашивания*. – 1976. – № 10. – С. 10-15.
5. Богданов Дж., Козин Ф. Вероятностные модели накопления повреждений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 344 с.
6. Семенюк Н.Ф. Средняя высота микровыступов шероховатой поверхности и плотность пятен контакта при контактировании шероховатой поверхности с гладкой, *Трение и износ*. – 1986. – Т.7, №1. – С. 85-91.
7. Сорокатый Р.В. Анализ современного состояния методов расчета износа и прогнозирования ресурса, *Проблемы трибологии*. – 2007. – №1. – С. 23-36.
8. Сорокатый Р.В. Метод трибоэлементов, – *Хмельницький: ХНУ*, 2009. – 242 с.
9. Войтов В.А., Захарченко М.Б. Моделирование процессов трения и изнашивания в трибосистемах в условиях граничной смазки. Часть 1. Расчет скорости работы диссипации в трибосистеме, *Проблемы трибологии*. – 2015. - № 1. – С. 49-57.
10. Войтов В.А., Захарченко М.Б. Моделирование процессов трения изнашивания в трибосистемах в условиях граничной смазки. Часть 2. Результаты моделирования, *Проблемы трибологии*. – 2015. – № 2. – С. 36-45.
11. Войтов В.А., Захарченко М.Б. Добротность трибосистемы, как функция износостойкости и потерь на трение, *MOTROL, LUBLIN-RZESZOW* – 2015, Vol. 17, - № 7. – С. 93 – 98.
12. Войтов В.А., Бекиров А.Ш., Войтов А.В. Критерий оценки добротности трибосистем и его связь с трибологическими характеристиками, *Проблемы трибологии*. – 2018. – № 2. – С. 35-41.
13. Войтов В.А., Захарченко М.Б. Интегральный параметр оценки трибологических свойств смазочных материалов, *Збірник наукових праць Української державної академії залізничного транспорту*. Том 2. – Харків: УкрДАЗТ, 2015. – Вип. 151. – С. 5 – 10.
14. Захарченко М.Б. Методика оценки реологических свойств структуры сопряженных материалов в трибосистеме, *Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. П. Василенка*. – Харків: ХНТУСГ, 2015. – Вип. 158, – С. 64-69.
15. Зажигаев Л.С., Кишьян А.А., Романиков Ю.И. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента, – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.
16. Войтов В.А., Бекиров А.Ш. Математическая модель переходных процессов в трибосистемах и результаты моделирования, *Проблемы трибологии*. – 2018. – № 1. – С. 18-27.

References

1. Kuz'menko A.G. Vliyanie statisticheskoy neodnorodnosti, razmerov i kinematcheskikh usloviy na iznos poverkhnostey treniya, *Treniye i iznos*. – 1985. – Т.6, № 3. – С. 432-441.

2. Tartakovskiy I.B. Korrelyatsionnoye uravneniye iznosa, *Vestnik mashinostroyeniya*. – 1968. – № 2. – S. 17-24.
3. Benderskiy A.M. Veroyatnostnaya model' iznosa detali, *Nadezhnost' i kontrol' kachestva*. – 1970. – № 5. – S. 13-24.
4. Kostetskiy B.I., Strel'nikov V.P., Tatsiy V.G. Markovskaya model' iznosa i prognozirovaniye dolgovechnosti iznashivayemykh detaley, *Problemy treniya i iznashivaniya*. – 1976. – № 10. – S. 10-15.
5. Bogdanoff Dzh., Kozin F. Veroyatnostnyye modeli nakopleniya povrezhdeniy: Per. s angl. – M.: Mir, 1989. – 344 s.
6. Semenyuk N.F. Srednyaya vysota mikrovystupov sherokhovatoy poverkhnosti i plotnost' pyaten kontakta pri kontaktirovanii sherokhovatoy poverkhnosti s gladkoy, *Treniye i iznos*. – 1986. – Т.7, №1. – S. 85-91.
7. Sorokatyy R.V. Analiz sovremennogo sostoyaniya metodov rascheta iznosa i prognozirovaniya resursa, *Problemi tribologii*. – 2007. – №1. – S. 23-36.
8. Sorokatyy R.V. Metod triboelementov, – *Khmel'nitskiy*: KHNU, 2009. – 242 s.
9. Voytov V.A., Zakharchenko M.B. Modelirovaniye protsessov treniya i iznashivaniya v tribosistemakh v usloviyakh granichnoy smazki. Chast' 1. Raschet skorosti raboty dissipatsii v tribosisteme, *Problemi tribologii*. – 2015. - № 1. – S. 49-57.
10. Voytov V.A., Zakharchenko M.B. Modelirovaniye protsessov treniya iznashivaniya v tribosistemakh v usloviyakh granichnoy smazki. Chast' 2. Rezul'taty modelirovaniya, *Problemi tribologii*. – 2015. – № 2. – S. 36-45.
11. Voytov V.A., Zakharchenko M.B. Dobrotnost' tribosistemy, kak funktsiya iznosostoykosti i poter' na treniye, *MOTROL, LUBLIN-RZESZOW* – 2015, Vol. 17, - № 7. – S. 93 – 98.
12. Voytov V.A., Bekirov A.SH., Voitov A.V. Kriteriy otsenki dobrotnosti tribosistem i yego svyaz' s tribologicheskimi kharakteristikami, *Problemi tribologii*. – 2018. – № 2. – S. 35-41.
13. Voytov V.A., Zakharchenko M.B. Integral'nyy parametr otsenki tribologicheskikh svoystv smazochnykh materialov, *Zbirnik naukovikh prats' Ukraïns'koï derzhavnoï akademii zaliznichnogo transportu*. Tom 2. – Kharkiv: UkrDAZT, 2015. – Vip. 151. – S. 5 – 10.
14. Zakharchenko M.B. Metodika otsenki reologicheskikh svoystv struktury sopryazhennykh materialov v tribosisteme, *Visnik Kharkivs'kogo natsional'nogo tekhnichnogo univertsitetu sil'skogo gospodarstva im. P. Vasilenka*. – Kharkiv: KHNTUSG, 2015. – Vip. 158, – S. 64-69.
15. Zazhigayev L.S., Kish'yan A.A., Romanikov YU.I. Metody planirovaniya i obrabotki rezul'tatov fizicheskogo eksperimenta, – M.: Atomizdat, 1978. – 232 s.
16. Voytov V.A., Bekirov A.SH. Matematicheskaya model' perekhodnykh protsessov v tribosistemakh i rezul'taty modelirovaniya, *Problemi tribologii*. – 2018. – № 1. – S. 18-27.