

Дмитрів В.Т.,
Ланець О.С.,
Серпутько Р.С.
Національний університет «Львівська
політехніка»
E-mail: Dmytriv_V@ukr.net

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНОГО ЕЛЕМЕНТА
ТРИМАСОВОЇ КОЛІВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ
З ЕФЕКТОМ «НУЛЬОВОЇ ЖОРСТКОСТІ»**

УДК 621.01:621-868

DOI 10.37700/ts.2020.21.50-62

Дмитрів В.Т., Ланець О.С., Серпутько Р.С. «Моделювання пружного елемента тримасової коливальної системи з ефектом «нульової жорсткості»

Одним із перспективних напрямків розвитку вібраційного технологічного обладнання є створення міжрезонансних вібраційних машин. Міжрезонансні режими роботи забезпечують значне зниження енергоспоживання у приводах.

Метою роботи є розроблення методики моделювання пружних елементів для тримасової міжрезонансної вібраційної системи з ефектом “нульової жорсткості”.

За умови довільного підбору мас при певному резонансному налагодженні безрозмірний коефіцієнт, як частка від жорсткості пружної системи реактивної маси, набуває таких значень, при яких жорсткість пружної системи узгоджується з інерційними параметрами системи в тому, щоб тримасова міжрезонансна коливальна система перебувала в резонансі. Ефект “нульової жорсткості” уможливлений за відсутності пружного елемента для реактивної маси, або за нульового значення безрозмірного коефіцієнта, як частки від жорсткості пружної системи реактивної маси.

Приведено результати визначення основних характеристик пружного елемента тримасової міжрезонансної коливальної системи аналітично і числовим методом скінчених елементів типу CosmosWorks (Simulation) в середовищі для проектування SolidWork..

Результати моделювання в середовищі SolidWork і аналітичного розрахунку основних параметрів пружної системи показали ідентичність отриманих значень, що підтверджує правильність запропонованої методики розрахунку пружних елементів тримасових коливальних систем з ефектом «нульової жорсткості». **Ключові слова:** машина вібраційна, резонанс, коливання, пружина плоска, жорсткість, амплітуда, маса.

Дмитрий В.Т., Ланец О.С., Серпутько Р.С. «Моделирование упругого элемента трёхмассовой системы с эффектом «нулевой жесткости»

Одним с перспективных направлений развития вибрационного технологического оборудования - это создание межрезонансных вибрационных машин. Межрезонансные режимы работы обеспечивают значимое понижение энергопотребление приводов.

Цель работы - разработка методики моделирования упругих элементов для трёхмассовой межрезонансной вибрационной системы с эффектом “нулевой жесткости”.

При условии произвольного подбора масс при определенном резонансном налаживании безразмерного коэффициента, как доли от жесткости упругой системы реактивной массы, приобретает таких значений, при которых жесткость упругой системы согласуется с инерционными параметрами системы в том, чтобы трёхмассовая межрезонансная колебательная система находилась в резонансе. Эффект “нулевой жесткости” возможен при отсутствии упругого элемента для реактивной массы, или при нулевом значении безразмерного коэффициента, как доли от жесткости упругой системы реактивной массы.

Приведены результаты определения основных характеристик упругого элемента трёхмассовой межрезонансной колебательной системы аналитически и числовым методом конечных элементов типа CosmosWorks (Simulation) в среде для проектирования SolidWork..

Результаты моделирования в среде SolidWork и аналитические расчеты основных параметров упругой системы показали идентичность полученных значений, что подтверждает верность предложенной методики расчета упругих элементов трёхмассовой колебательной системы с эффектом «нулевой жесткости».

Ключевые слова: машина вибрационная, резонанс, колебания, пружина плоская, жесткость, амплитуда, масса.

V. Dmytriv, O. Lanets, R. Serputko "Modeling the elastic element of a three-mass oscillating system with the effect of «zero stiffness»"

One of the promising areas of development vibrating technological equipment is the creation interresonant vibrating machines. Interresonant modes of operation provide a significant reduction in power consumption in the drives.

The aim of the work is to develop a technique for modeling elastic elements for a three-mass interresonant vibration system with the effect of "zero stiffness".

Under the condition of random selection of masses at a certain resonant adjustment, the dimensionless coefficient, as a fraction of the stiffness of the elastic system of reactive mass, acquires such values at which the

stiffness of the elastic system agrees with the inertial parameters of the system in that the three-mass interresonant oscillatory system was in resonance. The effect of "zero stiffness" is possible in the absence of an elastic element for the reactive mass, or at zero value of the dimensionless coefficient, as a fraction of the stiffness of the elastic system of the reactive mass.

The results of determining the main characteristics of the elastic element of a three-mass interresonant oscillatory system analytically and numerically by finite elements of the CosmosWorks type (Simulation) in the SolidWork design environment are presented.

The results of modeling in SolidWork environment and analytical calculation of the main parameters of the elastic system showed the identity of the obtained values, which confirms the correctness of the proposed method of calculating the elastic elements of three-mass oscillating systems with the effect of "zero stiffness".

Keywords: *vibrating machine, resonance, oscillation, flat spring, rigidity, amplitude, mass.*

Вступ

Одним із перспективних напрямків розвитку вібраційного технологічного обладнання є створення міжрезонансних вібраційних машин. Міжрезонансні режими роботи забезпечують значне зниження енергоспоживання у приводах. Ряд дослідників вважають, що для ефективного використання енергоощадливих міжрезонансних режимів роботи необхідно застосовувати малі інерційні значення реактивної маси й жорсткості відповідного пружного вузла [1]. Такими властивостями може володіти лише гнучке тіло - континуальна система, яка оптимально поєднує у собі інерційні та жорсткісні параметри.

Прикладне застосування в технологіях і техніці коливального руху надало вібраційним технологіям широкого розповсюдження із-за простоти реалізації. Уможливорюючи високу продуктивність та якість вібраційного обладнання, вібротехнології є низької собівартості, що є їх перевагою. Вони широко застосовуються для поштучної подачі деталей з навалу і з їх орієнтуванням, як вібраційні бункерні живильники, в операціях виготовлення будматеріалів, технології змішування сипких компонентів в фармацевтиці і сільському господарстві, зміцнювальних і викінчувальних операціях в машинобудуванні, в ряду інших виробничих задачах без участі людини.

Актуальність проблеми

Тримасові міжрезонансні коливальні системи не набули широкого застосування у промисловості через складність розрахунку, проектування та переналагодження. Широке розповсюдження мають одно- або двомасові вібраційні машини, які є значно простіші, оскільки в них наявна одна резонансна пружна система.

Однак, в одно- та двомасових вібраційних машин нижча енергоефективність та висока чутливість до маси завантаження, ніж у тримасових.

Для масового впровадження тримасових міжрезонансних коливальних систем пропонується застосування в них ефекту "нульової жорсткості". Відповідно це уможливить застосування однієї пружної коливальної системи. У цій роботі приводиться методика і приклад моделювання пружного елемента тримасової міжрезонансної коливальної системи з ефектом "нульової жорсткості".

Аналіз останніх досліджень

Відомо, що прямиий стержень має безліч власних форм коливання, де кожній формі коливань відповідає визначене значення частоти. Досліджували встановлення власної частоти коливань методом скінченних елементів [2]. Однак цей метод може створювати ряд помилок, що примушує варіювати складність (щільність) побудови структурної сітки для отримання прийнятних результатів. Також застосовували вібраційний аналіз функціонально градуйованих пластин із використанням методу скінченних елементів [3], або проводили експеримент методом кінцевих елементів в програмному забезпеченні ANSYS [4]. Великі амплітуди вільних коливань кінцевих балок аналізували за допомогою континууму та методу скінченних елементів [5], а власні коливання прямокутних пластин

з частково затиснутими кряями (на кутах) досліджували методом скінченних елементів [6].

Слід відмітити, що дослідження і проектування тримасових вібраційних систем системно проводяться кафедрою механіки та автоматизації машинобудування Національного університету «Львівська політехніка». Розроблено математичну модель та змодельовано амплітудно-частотні характеристики тримасової вібраційної площадки з електромагнітним приводом [7]. Для тримасових механічних коливальних систем як незалежних модулів руху силових вібраційних машин з електромагнітним приводом та синфазним рухом коливальних мас розроблена методика спрощеного розрахунку. Методика ґрунтується на ефекті відсутності жорсткості, або точці „абсолютної м'якості” пружної системи [8].

Застосовуються в технологічних процесах тримасові коливальні системи з інерційним приводом, що уможливають їх роботу в міжрезонансній зоні [9], зокрема тримасові сепаратори з електромагнітним приводом та напрямленим коливанням робочого органа. Новизною цих конструкцій є використання ефекту “нульової жорсткості” в багатомасових механічних коливальних системах з синфазним рухом коливальних мас. [10]

Важливим при проектуванні вібраційних систем дослідження, направлені на визначення параметрів елементів коливальної системи. Елементом коливальної системи є пружний елемент – пружина, у вигляді пластини або круглої балки. В ряді робіт розглядається балка як однорідний стержень з незмінними параметрами по довжині, для встановлення власної частоти коливань, які використовують теорію графів [11, 12]. Частотні характеристики нерівномірного стержня, що зазнають нелінійність коливань досліджували за допомогою методу множинної шкали часу, осьовою інерцією нехтували, відповідно рівняння руху статично стискаються лише на поперечному зміщенні [13]. Ряд дослідників отримали аналітичне рішення на основі наближення Венцеля, Крамера, Бриллюена для вільних поперечних коливань балок різного перерізу [14]. Досліджено вібрації балок з експоненційною змінною шириною поперечного перерізу для трьох типів крайових умов: вільного, шарнірного та защемленого кінців [15]. Нелінійні вільні коливання (великі амплітуди) конічних стержнів аналізували методом Мах-Мін підходу та методом гомотопічних збурень, і порівнявши отримані результати, підтвердили їх збіжність [16]. Частково розроблена методика встановлення частоти власних коливань ступінчастої балки з круглим перерізом [17]. Для вільних коливань конічних балок чисельними методами розв'язали диференціальні рівняння та встановили власні частоти завдяки комбінуванню методу Рунге-Кутта та методу детермінантного пошуку [18]. Узагальнений метод диференціальної квадратури та метод диференціального перетворення застосовано для вібраційного аналізу кругових арок, можна стверджувати про швидку конвергенцію та точність [19]. Існує метод знаходження власних коливань конічного прутка Бернуллі-Ейлера, в якому корені диференціального рівняння визначаються методом Фробеніуса, що уможливає отримання рішення степеневого ряду для згинальних коливань [20].

Проведений аналіз підтверджує актуальність подальших досліджень пружних елементів тримасової коливальної системи з ефектом “нульової жорсткості”.

Формулювання мети дослідження

Метою роботи є розроблення методики моделювання пружних елементів для тримасової міжрезонансної вібраційної системи з ефектом “нульової жорсткості”.

Результати досліджень

Методика визначення параметрів тримасової міжрезонансної коливальної системи з ефектом “нульової жорсткості”

Розглянемо один із варіантів складних вібраційних технологій, коли присутні три маси, активна, реактивна і проміжна, тримасову вібраційну систему з ефектом “нульової жорсткості”. Схема конструкції тримасової вібраційної системи з ефектом “нульової жорсткості” наведена на рис. 1.

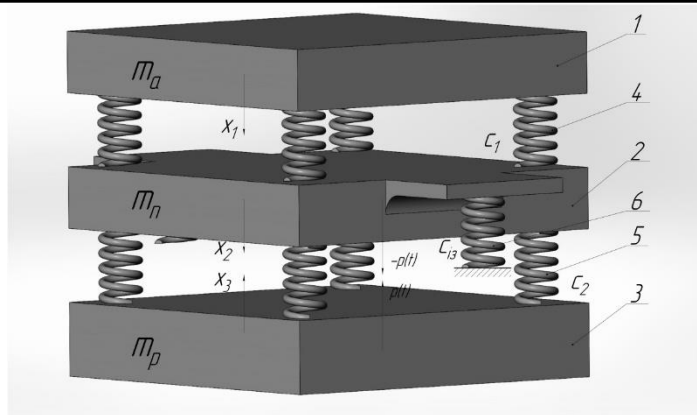


Рис. 1. Схема тримасової вібраційної машини:

1 – верхня (активна) маса (m_a); 2 – проміжна маса (m_n); 3 – нижня (реактивна) маса (m_p);
 4 – пружна система (C_1); 5 – пружна система (C_2); 6 – віброізолятори (C_{is})

Для визначення жорсткості пружних вузлів вібраційної машини скористаємося відомими залежностями [21]

$$C_2 = m_p \cdot \left(\frac{\omega}{z}\right)^2 \cdot \eta, \quad (1)$$

$$C_1 = m_a \cdot \left(\frac{\omega}{z}\right)^2 \cdot \left(\frac{m_p \cdot \eta + m_n \cdot (\eta - 1)}{(\eta - 1) \cdot (m_a - m_n) + m_p \cdot \eta}\right), \quad (2)$$

де η – безрозмірний коефіцієнт, частка від жорсткості C_2 :

$$\eta = \frac{m_a \cdot m_n \cdot \left(\frac{\omega}{z}\right)^2 - C_1 \cdot (m_a + m_n)}{m_a \cdot \left(\frac{\omega}{z}\right)^2 \cdot (m_n + m_p) - C_1 \cdot (m_a + m_n + m_p)}, \quad (3)$$

ω - колова частота;

z – резонансне налагодження міжрезонансної коливальної системи.

За умови довільного підбору мас m_a, m_n, m_p , при певному резонансному налагодженні z , параметр η набуває таких значень, при яких аналітичні залежності (1) і (2) повністю математично узгоджуються з інерційними параметрами системи в тому, щоб тримасова міжрезонансна коливальна система (МКС) перебувала в резонансі.

Безрозмірна частка η від жорсткості пружної системи C_2 може бути додатною, дорівнювати нулю і набувати від’ємних значень, які не мають прикладного застосування. Те, що $\eta = 0$, означає, що згідно з (1) жорсткість $C_2 = 0$, а отже, пружний елемент може бути відсутній, так званий ефект “нульової жорсткості”. Для досягнення цього ефекту необхідно, щоб значення жорсткості C_1 було певної величини, яку можна визначити з залежності (3), привівнявши до нуля. У цьому випадку чисельник:

$$m_a \cdot m_p \cdot \left(\frac{\omega}{z}\right)^2 - C_1 \cdot (m_a + m_n) = 0.$$

Тоді

$$C_1 = \left(\frac{m_a \cdot m_p}{m_a + m_n}\right) \cdot \left(\frac{\omega}{z}\right)^2 = M_{зв} \cdot \left(\frac{\omega}{z}\right)^2, \quad (4)$$

Аналіз залежності (4) показує, що міжрезонансна коливальна система перебуває в резонансі з налагодженням (проміжною масою) 2 за двомасовою схемою. Активна маса 1 коливається з проміжною масою 2 у протифазі. Тоді тримасова конструкція вібраційної машини еквівалентна двомасовій коливній системі. Реактивна маса 3 має силовий зв’язок з проміжною масою 2, тому її інерційні параметри не впливають на динамічні характеристики інших мас.

Уможливлення “нульової жорсткості” C_2 у тримасовій конструкції вібраційної

машини відбувається методом підбору жорсткості за двомасовою схемою.

На практиці “нульову жорсткість” отримати неможливо, а тому раціональніше використати жорсткість C_2 за коефіцієнта $\eta = 0,1 \dots 0,3$. Тоді, як пружну систему, можна застосовувати м'які гумові елементи.

За значень коефіцієнта $\eta = 0,7 \dots 1$ коливальна система є менш стабільною, призводить до повторного уточнення розрахункових параметрів та налагоджень.

Обґрунтування параметрів МКС з ефектом “нульової жорсткості” проводимо, приймаючи жорсткість пружної системи 5 (рис. 1) рівною $C_2 = 0$.

Розрахунок мас тримасової МКС, яка реалізує синфазний рух мас m_p та m_n , враховуючи що $\eta \rightarrow 0$, проводимо за методикою наведеною в [21]. Провівши відповідні перетворення і спрощення, реактивна маси тримасової МКС розраховується за заданих мас активної m_a і проміжної m_n :

$$m_p = \frac{m_n \cdot (1 - z^2) \cdot (m_a + m_n)}{z^2 \cdot (m_a + m_n) - m_n} \quad (5)$$

Для розрахунку активної маси за заданих мас проміжної m_n і реактивної m_p , залежність має вигляд:

$$m_a = \frac{m_n \cdot (1 - z^2) \cdot (m_n + m_p)}{z^2 \cdot (m_n + m_p) - m_n} \quad (6)$$

Для розрахунку проміжної маси за заданих мас активної m_a і реактивної m_p , залежність має вигляд:

$$m_n = \frac{1}{-2 \cdot (1 - z^2)} \left[(1 - z^2) \cdot (m_a + m_p) - \sqrt{z^4 \cdot (m_a - m_p)^2 - 2 \cdot z^2 \cdot (m_a^2 + m_p^2) + (m_a + m_p)^2} \right] \quad (7)$$

Вихідні параметри для пружних елементів міжрезонансної коливальної системи

Моделювання параметрів тримасової МКС проводимо в середовищі для проектування SolidWork.

Конструктивно задаємо робочу поверхню проміжної маси, з габаритними розмірами 300x300 мм, товщиною 20 мм. Результати розрахунку моментів інерції плити в середовищі SolidWork наведено на рис. 2

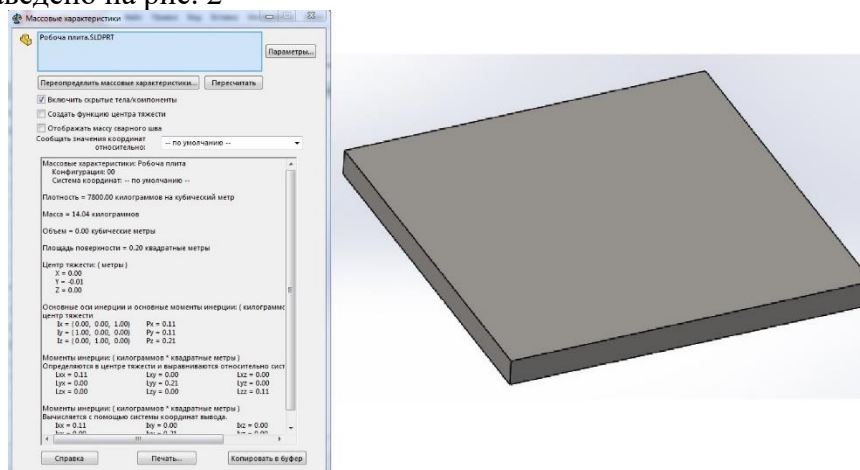


Рис. 2. Кадр розрахунку проміжної маси тримасової МКС у середовищі SolidWork

Проміжна маса з врахуванням поправочного коефіцієнта, який враховує маси всіх інших елементів, що кріпляться до робочій поверхні ($k = 1,23$), буде становити:

$$m_n = 14,04 \cdot 1,23 = 17,26 \text{ кг.}$$

Активна маса визначається з умови [21] $m_a = (0,3 \dots 0,5) \cdot m_n$, відповідно

$$m_a = (0,3 \dots 0,5) \cdot 17,26 = 5,178 \dots 8,63 \text{ кг.}$$

Приймаю, $m_a = 5,65 \text{ кг.}$

Розрахунок реактивної маси виконаємо за залежністю [21]:

$$m_p \geq \frac{P_{\text{пост}}}{g \cdot \sqrt{2}}, \quad (8)$$

де g – прискорення вільного падіння;

$P_{\text{пост}}$ – постійна складова зусилля, враховує сумарне амплітудне значення тягового зусилля електромагнітних вібробудників.

Нехай електромагнітний вібробудник розвиває максимальне зусилля $P_1 = 300 \text{ Н.}$ Якщо з конструктивних міркувань приймаємо два вібробудники, тоді сумарне тягове значення становить $P = P_1 \cdot n = 300 \cdot 2 = 600 \text{ Н.}$

Постійну складову зусилля, наприклад для частоти в 100 Гц, визначаємо за залежністю $P_{\text{пост}} = (2/\pi) \cdot P,$ тоді реактивна маса буде становити $m_p \geq 27,6 \text{ кг.}$

Щоб уникнути ефекту «прилипання» масивної реактивної маси 3 (рис. 1) до проміжної 2 із-за наявності в однотактних електромагнітних вібробудниках постійної складової зусилля $P_{\text{пост}},$ примусово обтяжуємо реактивну масу 3, щоб уможливити її нерухомість. Ефект «прилипання» виникає тому, що власна частота коливань МКС, яку створюють реактивна маса 3 та віброізолятори 5, набагато менша за частоту вимушених коливань, а отже, амплітуда коливань реактивної маси практично відсутня. За умови вимушеного недотримання інерційного параметра реактивної маси згідно з (8), проміжна та реактивна маси коливатимуться синфазно, хоча їх амплітуди істотно відрізнятяться. Інерційне значення реактивної маси повинно враховувати, що із зменшенням повітряного зазору в електромагнітному вібробуднику постійна складова $P_{\text{пост}}$ зростає нелінійно, тому враховуючи залежність (8) нелінійне значення реактивної маси приймаємо $m_p = 33,3 \text{ кг.}$

Амплітуди коливань мас системи з «нульовою жорсткістю» на частоті вимушених коливань ω визначаємо за загально прийнятими залежностями [21]:

$$X_a = \frac{-P \cdot C_1 \cdot m_p}{D_5}, X_n = \frac{-P \cdot m_p \cdot (C_1 - m_a \cdot \omega^2)}{D_5}, X_p = \frac{P \cdot (C_1 \cdot (m_a + m_n) - \omega^2 \cdot m_a \cdot m_n)}{D_5}, \quad (9)$$

де $D_5 = (\omega^4 \cdot m_a \cdot m_n \cdot m_p - \omega^2 \cdot (m_n \cdot (m_a \cdot C_2 + m_p \cdot C_1) + m_a \cdot m_p \cdot (C_1 + C_2) + C_1 \cdot C_2 \cdot (m_a + m_n + m_p))).$

Залежності граничних амплітуд коливання мас, за умови $C_2 \rightarrow 0,$ будуть мати вигляд:

$$X_a = \frac{P \cdot C_1}{\omega^2 \cdot (C_1 \cdot (m_a + m_n) - m_a \cdot m_n \cdot \omega^2)}, X_n = \frac{P \cdot (C_1 - m_a \cdot \omega^2)}{\omega^2 \cdot (C_1 \cdot (m_a + m_n) - m_a \cdot m_n \cdot \omega^2)}, X_p = \frac{-P}{m_p \cdot \omega^2}, \quad (10)$$

Записуємо залежності для визначення відношення амплітуд коливання мас з врахуванням залежності (10) визначення жорсткості $C_1:$

$$\frac{X_a}{X_n} = \frac{m_n}{m_n - z^2 \cdot (m_a + m_n)}, \quad \frac{X_a}{X_p} = \frac{m_p}{(z^2 - 1) \cdot (m_a + m_n)}, \quad (11)$$

де z – резонансне налагодження МКС, приймаємо $z = 0,95.$

Прийнявши перевантаження на робочий орган на рівні $\xi = 12$ і враховуючи залежність для колової частоти вимушених коливань $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu,$ де ν є частота коливань ($\nu = 100 \text{ Гц,}$ амплітуда робочої поверхні проміжної маси буде становити:

$$X_n = \frac{\xi \cdot g}{\omega^2} = \frac{12 \cdot 9,81}{628^2} = 0,000298 \text{ м} = 0,298 \text{ мм} \approx 0,3 \text{ мм.}$$

З залежності (11) амплітуда коливань активної маси визначимо так:

$$X_a = \frac{X_n \cdot m_n}{m_n - z^2 \cdot (m_a + m_n)} = \frac{0,0003 \cdot 17,26}{17,26 - 0,95^2 \cdot (5,65 + 17,26)} = 1,38 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,0138 \text{ мм.}$$

Для реактивної маси амплітуда коливань визначиться з залежності (11):

$$X_p = \frac{(z^2 - 1)(m_a + m_n) X_a}{m_p} =$$

$$= \frac{(0,95^2 - 1)(5,65 + 17,26)1,38 \cdot 10^{-5}}{33,3} = 0,095 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 9,5 \cdot 10^{-4} \text{ мм.}$$

Відносна амплітуда коливань, що є параметром максимальної деформації пружного вузла, становитиме:

$$\delta = X_{\text{від}} = X_n + X_a = 0,3 + 0,0138 = 0,314 \text{ мм.}$$

Моделювання пружного елемента вібраційної системи

Для тримасової вібраційної системи (рис.1) застосуємо пружний елемент, модель якого наведена на рис. 3.

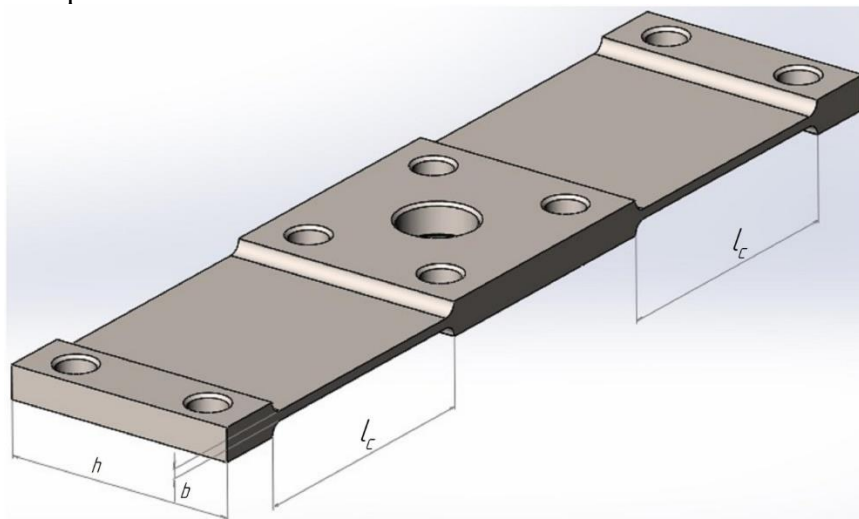


Рис. 3. Просторова модель плоскої пружини

Конструкційні розміри ширини h плоского пружного елемента задаємо виходячи з конструктивних особливосте вібронашину, наприклад у нашому випадку $h = 0,007 \text{ м}$, а робоча мінімально-допустима товщина b і мінімальна допустима довжина l_c робочої ділянки пружного елемента розраховується.

Розміщення плоских пружних елементів (пружин) показано на рис. 4.

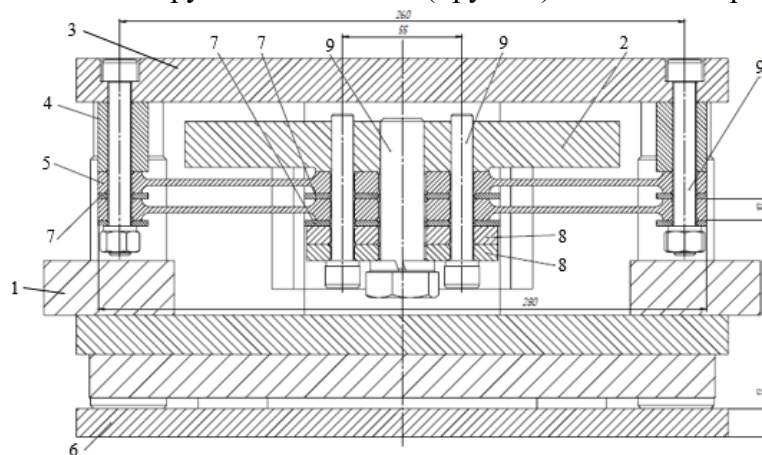


Рис. 4. Конструкція тримасової вібраційної машини:

1 – реактивна маса; 2 – активна маса; 3 – проміжна (робоча) маса (поверхня); 4 – проставка пружина; 5 – плоска пружина; 6 – основа вібронашину; 7 – прокладки пружини; 8 – накладки пружини; 9 – кріплення

Визначаємо сумарну жорсткість c_1 (рис. 4) резонансної пружної системи, яка повинна забезпечити резонансне налагодження $z = 0,95$, за залежністю:

$$c_1 = M_{зв} \cdot \left(\frac{\omega}{z}\right)^2, \quad (12)$$

де $M_{зв}$ – зведена маса вібраційної системи (рис. 4), визначається за залежністю:

$$M_{зв} = \frac{m_a \cdot m_n}{m_a + m_n}, \quad (13)$$

$$M_{зв} = \frac{5,65 \cdot 17,26}{5,65 + 17,26} = 4,26 \text{ кг.}$$

Тоді жорсткість пружного елемента становить:

$$c_1 = 4,26 \cdot \left(\frac{628}{0,95}\right)^2 = 1,86 \cdot 10^6 \text{ Н/м.}$$

Робоча мінімально-допустима товщина пружного елемента (табл. 2:2.2 [21]) визначається за залежністю:

$$b = \sqrt[3]{\frac{c_1 \cdot l_c^3}{E \cdot h \cdot n \cdot k_3}}, \quad (14)$$

де E – значення модуля пружності при згині, для сталей 65Г, 60С2, 60С2А, 602ХФА, з яких можливе виготовлення пружин, становить $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па;

n – сумарна кількість робочих ділянок, в наведеному прикладі пружну систему складають два пружні елементи, кожен з яких має дві робочі ділянки, тоді $n = 4$;

k_3 – коефіцієнт защемлення пружних елементів, $k_3 = 0,8$;

l_c – мінімальна допустима довжина робочої ділянки пружного елемента, згідно рекомендацій табл. 2:2.7 [21], визначається залежністю:

$$l_{c \min} = 3 \cdot \delta \cdot k_k \cdot \sqrt[3]{\frac{c_1 \cdot E^2}{h \cdot n \cdot k_3 \cdot [\sigma_{-1}]^3}}, \quad (15)$$

де δ – максимальна деформація пружного елемента;

k_k – коефіцієнт концентрації напружень, $k_k = 1,2$;

$[\sigma_{-1}]$ – допустиме напруження за знакозмінних циклічних навантажень, $[\sigma_{-1}] = 330$ МПа;

$$l_{c \min} = 3 \cdot 0,000314 \cdot 1,2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1,86 \cdot 10^6 \cdot (2 \cdot 10^{11})^2}{0,07 \cdot 4 \cdot 0,8 \cdot (330 \cdot 10^6)^3}} = 0,078 \text{ м} = 78 \text{ мм.}$$

Приймаємо $l_c = 80$ мм, мінімальна товщина пружного елемента становить:

$$b = \sqrt[3]{\frac{1,86 \cdot 10^6 \cdot 0,08^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,07 \cdot 4 \cdot 0,8}} = 0,00277 \text{ м} = 2,77 \text{ мм}$$

З конструкційних міркувань товщина пружного елемента становить $b = 3$ мм.

Напруження у пружному елементі (табл. 2:2.5 [21]), визначаються за залежністю:

$$\sigma_{max} = \frac{3 \cdot \delta \cdot k_k \cdot E \cdot b}{l_c^2}, \quad (16)$$

$$\sigma_{max} = \frac{3 \cdot 0,000314 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,003}{0,08^2} = 106 \text{ МПа.}$$

Проведемо моделювання параметрів пружного елемента числовим методом в середовищі SolidWork і порівняємо отримані результати.

Моделювання пружного елемента вібраційної системи методом скінчених елементів у середовищі SolidWork

Спроектвану просторову модель плоскої пружини (рис. 3) розрахуємо методом скінчених елементів типу CosmosWorks (Simulation) в середовищі SolidWork. Пружний елемент защемлюємо по кінцях і навантажуюмо тестовим зусиллям в 100 Н (рис. 5).

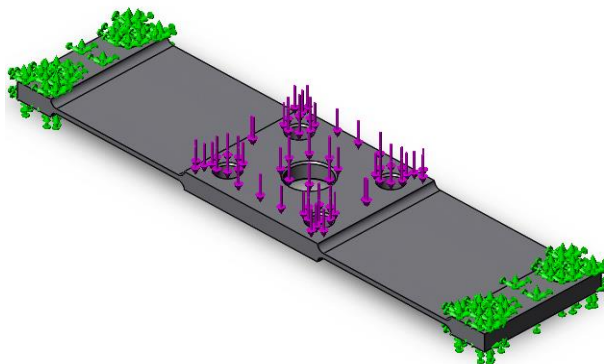


Рис. 5. Розрахункова схема пружного елемента, з вказаними защемленими кінцями і тестовим навантаженням

Встановивши параметри, розбиваємо пружний елемент на скінченні елементи (рис. 6).

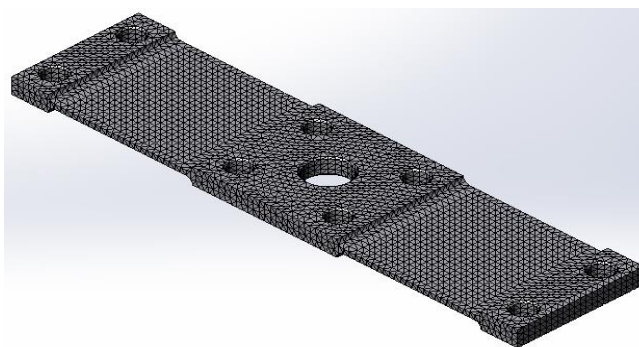


Рис. 6. Розбиття плоскої пружини на скінченні елементи

Розрахункові епюри переміщень (прогину) (рис. 7) уможливають визначити жорсткість пружного елемента.

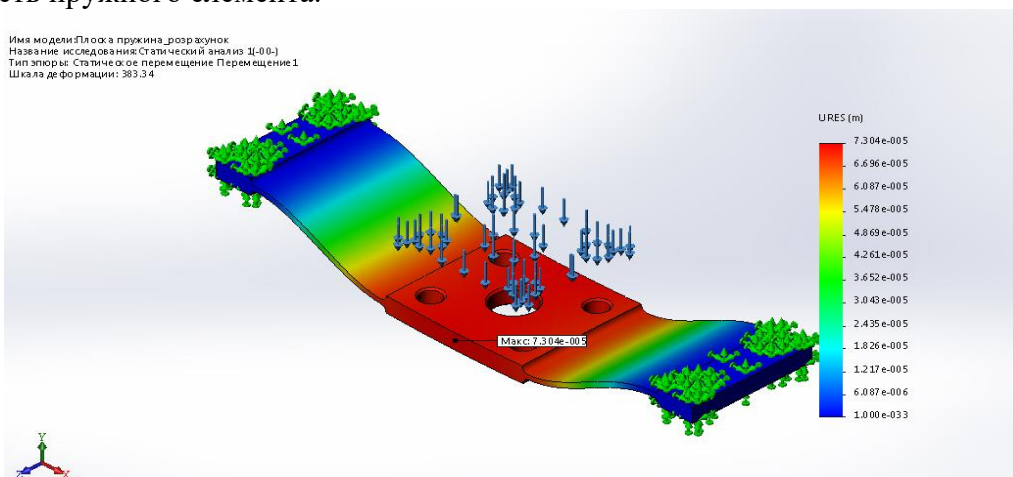


Рис. 7. Результати розрахунку пружного елемента на жорсткість

З результатів розрахунку (рис. 7) визначено, що прогин становить $\delta = 7,304 \cdot 10^{-5}$ м, тоді жорсткість одного пружного елемента буде рівною:

$$C_{1.1} = \frac{100}{7,304 \cdot 10^{-5}} = 1,36 \cdot 10^6 \text{ Н/м.}$$

Жорсткість пружної системи у вигляді двох пружних елементів буде рівною $C_1 = 2,72 \cdot 10^6$ Н/м, що вищим від аналітично розрахованої, значення якої $1,86 \cdot 10^6$ Н/м.

Враховуючи, що защемлення неідеальне, дійсна жорсткість буде дещо нижчою за модельовану.

Результати моделювання міцності пружного елемента методом скінчених елементів наведені у вигляді епюри результатів (рис. 8).

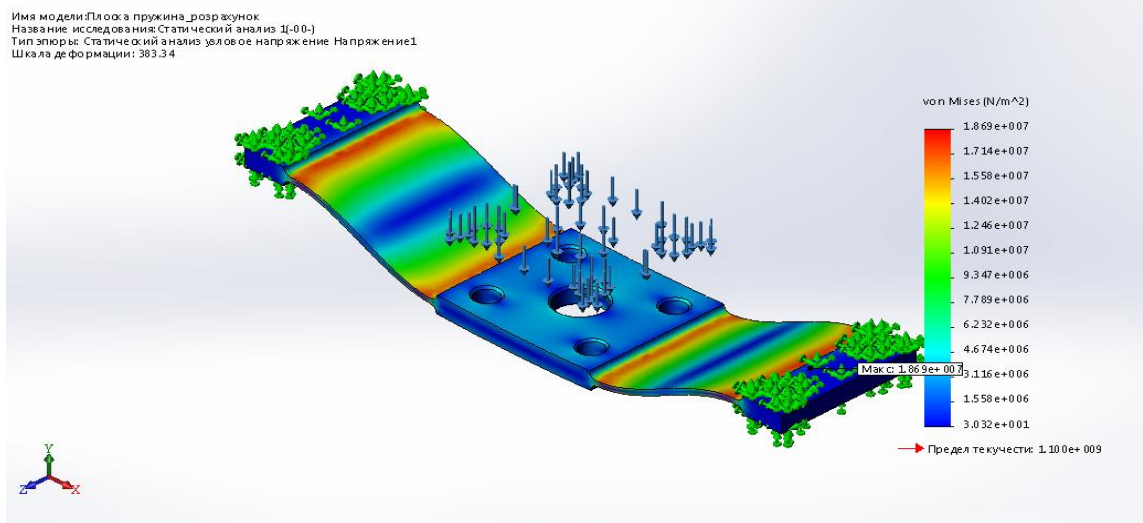


Рис. 8. Результати розрахунку пружного елемента на міцність

Аналіз результатів моделювання (рис. 8) показує, що максимальне напруження яке виникає в пружному елементі становить $\sigma_{max} = 186$ МПа.

Висновки

Результати моделювання в середовищі SolidWork і аналітичного розрахунку основних параметрів пружної системи показали збіжність отриманих значень, що підтверджує правильність запропонованої методики розрахунку тримасових міжрезонансних коливальних систем з ефектом “нульової жорсткості”.

Уможливлення “нульової жорсткості” у тримасовій конструкції вібраційної машини досягається підбирання жорсткості C_2 за двомасовою схемою. У таких МКС відсутність однієї резонансної пружної системи значно спрощує конструкцію та її налагодження, що є перевагою таких систем.

В традиційних двомасових конструкціях коливальних систем кінематичне збурення відсутнє, на відміну від тримасових систем, і зокрема, в яких застосовується ефект “нульової жорсткості”. Для приведення в рух проміжної (робочої) маси необхідна маса реактивна, відносно якої і відбувається силове збурення проміжної маси.

Список використаних джерел

1. Lanets O.S. Substantiation of consolidated inertial parameters of vibrating bunker feeder / Lanets O.S., Derevenko I.A., Borovets V.M., Kovtonyuk M.M., Komada P., Mussabekov K., Yeraliyeva B. // *Przegląd Elektrotechniczny*. – 2019. - Vol. 95, no. 4. - P. 47–52.
2. Gursky V.M. Implementation of dual-frequency resonant vibratory machines with pulsed electromagnetic drive / Gursky V.M., Kuzio I.V., Lanets O.S., Kisała P., Tolegenova A., Syzdykpayeva A. // *Przegląd Elektrotechniczny*. – 2019. - Vol. 95, no. 4. - P. 41–46.
3. Sharma A.K. Study on Harmonic Analysis of Functionally Graded Plates Using Fem / Sharma A.K., Sharma P., Chauhan P.S., Bhadoria S.S. // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. – 2018. - Vol.23, no.4. - P.941-961.
4. Jaworski J. W. Free vibration of a cantilevered beam with multiple steps: comparison of several theoretical methods with experiment / Jaworski J.W., Dowell E. H. // *Journal of Sound and Vibration*. – 2008. - Vol.312, no.4-5. - P.713-725.
5. Raju L.S. Large amplitude free vibrations of tapered beams / Raju L.S., Raju K., Rao G.V. // *AIAA Journal*. - 1976. - Vol.14, no.2. - P.280-282.

6. Gharaibeh M.A. Numerical Investigation of the Free Vibration of Partially Clamped Rectangular Plates / Gharaibeh M.A., Obeidat A.M., Obaidat M.H. // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. – 2018. - Vol.23, no.2. - P.385-400.
7. Ланець О.С. Динаміка тримасової вібраційної площадки з елетромагнітним приводом для ущільнення бетону / Ланець О.С. // *Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні: Вісн. нац. ун-ту “Львівська політехніка”*. – 2003. – № 480. – С. 101–108
8. Ланець О.С. Розрахунок тримасових механічних коливальних систем вібраційних машин з електромагнітним приводом та синфазним рухом коливальних мас / Ланець О.С. // *Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні*. – 2005. - Вип. 39. – С. 76-82.
9. Ланець О.С. Обґрунтування параметрів тримасової міжрезонансної вібраційної машини з інерційним приводом / Ланець О. С., Майструк П. В., Боровець В. М., Деревенько І. А. // *Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні*. – 2019. - Вип. 53. – С. 13-22.
10. Ланець О.С. Деякі аспекти створення синфазних тримасових сепараторів з електромагнітним приводом та напрямленими коливаннями робочого органа / Ланець О.С. // *Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні*. - 2007. - Вип. 41. – С. 30-41.
11. Buchacz A. Calculation of flexibility of vibrating beam as the subsystem of mechatronic system by means the exact and approximate methods / Buchacz A. // *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. – 2009. - Vol.9, no.1. - P.373-374.
12. Buchacz A. The supply of formal notions to synthesis of the vibrating discrete-continuous mechatronic systems / Buchacz A. // *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering, International OCOSCO World Press*. – 2011. - Vol. 44, no.2. - P.168- 178.
13. Clementi F. Nonlinear vibrations of non-uniform beams by the MTS asymptotic expansion method / Clementi F., Demeio L., Mazzilli C.E.N. and Lenci S. // *Continuum Mech. Thermodyn*. – 2015. - Vol.27. - P.703-717.
14. Firouz-Abadi R.D. An asymptotic solution to transverse free vibrations of variable-section beams / Firouz-Abadi R.D., Haddadpour H., Novinzadeh A.B. // *Journal of Sound and Vibration*. – 2007. - Vol. 304. - P.530-540.
15. Ece M.C. Vibration of a variable cross-section beam / Ece M.C., Aydogdu M., Taskin V. // *Mechanics Research Communications*. – 2007. - Vol. 34, no.1. - P.78-84.
16. Mahmoud B. Analytical study on the vibration frequencies of tapered beams / Mahmoud B., Iman P., Mahdi B. // *Latin American Journal of Solids and Structures*. – 2011. - Vol.8. - P.149-162.
17. Kisa M. Free vibration analysis of uniform and stepped cracked beams with circular cross sections / Kisa M., Gurel M. A. // *International Journal of Engineering Science*. – 2007. - Vol. 45, no.2-8. - P.364-380.
18. Lee B.K. Free vibrations of tapered Beams with general boundary condition / Lee B.K., Lee J.K., Lee T.E., Kim S.G. // *(KSCE) Journal of Civil Engineering*. – 2002. - Vol.6, no.3. - P.283-288.
19. Shin Y.J. Vibration analysis of a circular arch with variable cross section using differential transformation and generalized differential quadrature / Shin Y.J., Kwon K.M., Yun J.H. // *Journal of Sound and Vibration*. – 2008. - Vol.309, no.1-2. - P.9-19.
20. Lee J.W. Free vibration analysis using the transfer-matrix method on a tapered beam / Lee J.W. // *Journal of Computers and Structures*. – 2016. - Vol.164. - P.75-82.
21. Ланець О. Основи розрахунку та конструювання вібраційних машин. Книга 1. Теорія та практика створення вібраційних машин з гармонійним рухом робочого органа: навч. посібник / Ланець О. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2018. – 612 с.

References

1. Lanets O.S. Substantiation of consolidated inertial parameters of vibrating bunker feeder / Lanets O.S., Derevenko I.A., Borovets V.M., Kovtonyuk M.M., Komada P., Mussabekov K., Yeraliyeva B. // *Przegląd Elektrotechniczny*. – 2019. - Vol. 95, no. 4. - P. 47–52.
2. Gursky V.M. Implementation of dual-frequency resonant vibratory machines with pulsed electromagnetic drive / Gursky V.M., Kuzio I.V., Lanets O.S., Kisała P., Tolegenova A., Syzdykpayeva A. // *Przegląd Elektrotechniczny*. – 2019. - Vol. 95, no. 4. - P. 41–46.
3. Sharma A.K. Study on Harmonic Analysis of Functionally Graded Plates Using Fem / Sharma A.K., Sharma P., Chauhan P.S., Bhadoria S.S. // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. – 2018. - Vol.23, no.4. - P.941-961.
4. Jaworski J. W. Free vibration of a cantilevered beam with multiple steps: comparison of several theoretical methods with experiment / Jaworski J.W., Dowell E. H. // *Journal of Sound and Vibration*. – 2008. - Vol.312, no.4-5. - P.713-725.
5. Raju L.S. Large amplitude free vibrations of tapered beams / Raju L.S., Raju K., Rao G.V. // *AIAA Journal*. - 1976. - Vol.14, no.2. - P.280-282.
6. Gharaibeh M.A. Numerical Investigation of the Free Vibration of Partially Clamped Rectangular Plates / Gharaibeh M.A., Obeidat A.M., Obaidat M.H. // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. – 2018. - Vol.23, no.2. - P.385-400.
7. Lanets O.S. Dynamika trymasovoi vibratsiinoi ploshchadky z eletromahnitnym pryvodom dlia ushchilnennia betonu / Lanets O.S. // *Optymizatsiia vyrobnych protsesiv i tekhnichni kontrol u mashynobuduvanni: Visn. Nats. un-tu "Lvivska politekhnika"*. – 2003. – № 480. – S. 101–108
8. Lanets O.S. Rozrakhunok trymasovykh mekhanichnykh kolyvalnykh system vibratsiinykh mashyn z elektromahnitnym pryvodom ta synfaznym rukhom kolyvalnykh mas / Lanets O.S. // *Avtomatyzatsiia vyrobnych protsesiv u mashynobuduvanni ta pryladobuduvanni*. – 2005. - Vyp. 39. – S. 76-82.
9. Lanets O.S. Obgruntuvannia parametriv trymasovoi mizhrezonansnoi vibratsiinoi mashyny z inertiinym pryvodom / Lanets O. S., Maistruk P. V., Borovets V. M., Derevenko I. A. // *Avtomatyzatsiia vyrobnych protsesiv u mashynobuduvanni ta pryladobuduvanni*. – 2019. - Vyp. 53. – S. 13-22.
10. Lanets O.S. Deiaki aspekty stvorennia synfaznykh trymasovykh separatoriv z elektromahnitnym pryvodom ta napriamlenymy kolyvanniamy robochoho orhana / Lanets O.S. // *Avtomatyzatsiia vyrobnych protsesiv u mashynobuduvanni ta pryladobuduvanni*. - 2007. - Vyp. 41. – S. 30-41.
11. Buchacz A. Calculation of flexibility of vibrating beam as the subsystem of mechatronic system by means the exact and approximate methods / Buchacz A. // *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. – 2009. - Vol.9, no.1. - P.373-374.
12. Buchacz A. The supply of formal notions to synthesis of the vibrating discrete-continuous mechatronic systems / Buchacz A. // *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering, International OCOSCO World Press*. – 2011. - Vol. 44, no.2. - P.168- 178.
13. Clementi F. Nonlinear vibrations of non-uniform beams by the MTS asymptotic expansion method / Clementi F., Demeio L., Mazzilli C.E.N. and Lenci S. // *Continuum Mech. Thermodyn*. – 2015. - Vol.27. - P.703-717.
14. Firouz-Abadi R.D. An asymptotic solution to transverse free vibrations of variable-section beams / Firouz-Abadi R.D., Haddadpour H., Novinzadeh A.B. // *Journal of Sound and Vibration*. – 2007. - Vol. 304. - P.530-540.
15. Ece M.C. Vibration of a variable cross-section beam / Ece M.C., Aydogdu M., Taskin V. // *Mechanics Research Communications*. – 2007. - Vol. 34, no.1. - P.78-84.

16. Mahmoud B. Analytical study on the vibration frequencies of tapered beams / Mahmoud B., Iman P., Mahdi B. // Latin American Journal of Solids and Structures. – 2011. - Vol.8. - P.149-162.
17. Kisa M. Free vibration analysis of uniform and stepped cracked beams with circular cross sections / Kisa M., Gurel M. A. // International Journal of Engineering Science. – 2007. - Vol. 45, no.2-8. - P.364-380.
18. Lee B.K. Free vibrations of tapered Beams with general boundary condition / Lee B.K., Lee J.K., Lee T.E., Kim S.G. // (KSCE) Journal of Civil Engineering. – 2002. - Vol.6, no.3. - P.283-288.
19. Shin Y.J. Vibration analysis of a circular arch with variable cross section using differential transformation and generalized differential quadrature / Shin Y.J., Kwon K.M., Yun J.H. // Journal of Sound and Vibration. – 2008. - Vol.309, no.1-2. - P.9-19.
20. Lee J.W. Free vibration analysis using the transfer-matrix method on a tapered beam / Lee J.W. // Journal of Computers and Structures. – 2016. - Vol.164. - P.75-82.
21. Lanets O. Osnovy rozrakhunku ta konstruiuvannia vibratsiinykh mashyn. Knyha 1. Teoriia ta praktyka stvorennia vibratsiinykh mashyn z harmoniinykh rukhom robochoho orhana: navch. posibnyk / Lanets O. – Lviv: Vydavnytstvo Lvivskoi politekhniki, 2018. – 612 s.