Ольшанський В. П.,
Сліпченко М. В.,
Спольнік О.І.
Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка
E-mail: teoriyaTMM@gmail.com

ПРО РУХ КВАДРАТИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА З СУХИМ ТЕРТЯМ

УДК 534.1:539.3 DOI 10.37700/ts.2020.21.16-25

*Ольшанський В.П., Сліпченко М.В., Спольнік О.І. «**Про рух квадратично нелінійного осцилятора з сухим тертям»***

Робота присвячена виведенню та апробації формул для обчислення переміщення осцилятора та визначення тривалостей напівциклів коливань в умовах сухого тертя. Вивести точне рекурентне співвідношення для обчислення розмахів затухаючих вільних коливань за умови дії сухого тертям можливо й без побудови розв'язку диференціального рівняння руху, якщо використати енергетичний метод. Але визначення переміщень осцилятора у часі потребує розв'язку диференціального рівняння руху.

В роботі Описано вільні затухаючі коливання осцилятора з симетричною квадратично нелінійною силовою характеристикою, що має лінійну складову. Причиною коливань служить початкове відхилення системи від положення статичної рівноваги, а їх затухання є наслідком дії сили сухого тертя. Розглянуто варіанти жорсткої та м'якої пружних характеристик. Для обох із них побудовано точні розв'язки рівняння руху. У підсумку переміщення осцилятора в часі виражено через еліптичні функції Якобі. Тривалість чверть і напівциклів виражено через еліптичний інтеграл першого роду, що потребує використання таблиць цих спеціальних функцій. Наведено також наближені формули для обчислення значень еліптичних функцій, де їх зведено до обчислень елементарних функцій. Проведення порівняння числових результатів, одержаних за допомогою аналітичних розв'язків та чисельним інтегруванням вихідного диференціального рівняння руху на комп'ютері. Виявлено малі розбіжності в значеннях переміщень, зумовлених наближеним обчисленням еліптичних функцій. Похибки реалізації аналітичного розв'язку пов'язані з наближеним обчисленням функції Якобі. За підсумками порівняння числових результатів підтверджено вірогідність виведених розрахункових формул стосовно переміщень і тривалостей напівциклів, що залежить від розмахів коливань.

Встановлено, що диференціальне рівняння вільних коливань осцилятора з квадратично нелінійною силовою характеристикою та сухим тертям має точні аналітичні розв'язки, що виражаються через еліптичні функції Якобі, а отримані наближені розв'язки мають досить гарну узгодженість з чисельним інтегруванням рівнянь руху на комп'ютері.
Ключові слова: *вільні затухаючі коливання, переміщення осцилятора в часі, тривалість напівциклів, еліптичні функції Якобі, еліптичні інтеграли першого роду.*

*Ольшанский В.П., Слипченко М.В., Спольник А.И. **«О движении квадратично нелинейного осциллятора с сухим трением»***

Работа посвящена выводу и апробации формул для вычисления перемещения осциллятора и определения длительностей полуцикл колебаний в условиях сухого трения. Вывести точное рекуррентное соотношение для вычисления размахов затухающих свободных колебаний в условиях действия сухого трения возможно без построения решения дифференциального уравнения движения, если использовать энергетический метод. Но определение перемещений осциллятора во времени требует развязку дифференциального уравнения движения.

В работе Описаны свободные затухающие колебания осциллятора с симметричной квадратично нелинейной силовой характеристикой, имеет линейную составляющую. Причиной колебаний служит первоначальное отклонение системы от положения статического равновесия, а их затухание является следствием действия силы сухого трения. Рассмотрен варианты жесткой и мягкой упругих характеристик. Для обоих из них построено точные решения уравнения движения. В итоге перемещения осциллятора во времени выражено через эллиптические функции Якоби. Продолжительность четверть и полуцикл выражено через эллиптический интеграл первого рода, требует использования таблиц этих специальных функций. Приведены также приближенные формулы для вычисления значений эллиптических функций, где их сведено к вычислений элементарных функций. Проведение сравнения числовых результатов, полученных с помощью аналитических решений и численным интегрированием исходного дифференциального уравнения движения на компьютере. Выявлено малые различия в значениях перемещений, обусловленных приближенным вычислением эллиптических функций. Погрешности реализации аналитических решений связанные с приближенным вычислением функции Якоби. По итогам сравнения числовых результатов подтверждено вероятность выведенных расчетных формул относительно перемещений и длительностей полуцикл, зависит от размаха колебаний.

Установлено, что дифференциальное уравнение свободных колебаний осциллятора с квадратично нелинейной силовой характеристикой и сухим трением имеет точные аналитические решения,

выражающиеся через эллиптические функции Якоби, а полученные приближенные решения имеют достаточно хорошую согласованность с численным интегрированием уравнений движения на компьютере.
Ключевые слова: *свободные затухающие колебания, перемещение осциллятора во времени, продолжительность полуцикл, эллиптические функции Якоби, эллиптические интегралы первого рода.*

*V. Olshanskiy, M. Slipchenko, O. Spolnik "**On the motion of a quadratically nonlinear oscillator with dry friction**"*

The work is devoted to the derivation and testing of formulas for calculating the displacement of an oscillator and determining the duration of a half-cycle of oscillations under conditions of dry friction. It is possible to derive an exact recurrence relation for calculating the ranges of damped free oscillations under conditions of dry friction without constructing a solution to the differential equation of motion, using the energy method. But determining the displacements of the oscillator in time requires decoupling the differential equation of motion.

The paper describes free damped oscillations of an oscillator with a symmetric quadratically nonlinear power characteristic, has a linear component. The cause of oscillations is the initial deviation of the system from the position of static equilibrium, and their damping is a consequence of the action of the force of dry friction. Variants of hard and soft elastic characteristics are considered. For both of them, exact solutions of the equation of motion are constructed. As a result, the movement of the oscillator in time is expressed in terms of Jacobi elliptic functions. The duration of a quarter and a half-cycle is expressed in terms of an elliptic integral of the first kind, requires the use of tables of these special functions. Approximate formulas for calculating the values of elliptic functions are also given, where they are reduced to calculating elementary functions. Comparison of numerical results obtained using analytical solutions and numerical integration of the original differential equation of motion on a computer. Small differences in the values of the displacements due to the approximate calculation of elliptic functions are revealed. Errors in the implementation of analytical solutions associated with the approximate calculation of the Jacobi function. Based on the comparison of the numerical results, the probability of the derived design formulas for the displacements and half-cycle durations was confirmed, depending on the range of fluctuations.

It was found that the differential equation of free oscillations of an oscillator with a quadratically nonlinear force characteristic and dry friction has exact analytical solutions expressed in terms of Jacobi elliptic functions, and the obtained approximate solutions have a fairly good agreement with the numerical integration of the equations of motion on a computer.
Keywords: *free damped oscillations, displacement of an oscillator in time, half-cycle duration, Jacobi elliptic functions, elliptic integrals of the first kind.*

Вступ

В механізмах і машинах широко застосовуються пружні та гнучкі елементи, рух яких можна розглядати як коливальний. В першому наближенні, найлегші залежності отримують розглядом лінійних коливань без урахування дисипативних сил. Для створення більш коректних моделей руху необхідно враховувати як не лінійність коливань, так і наявність дисипативних сил.

Актуальність проблеми

Для можливості безпечної експлуатації деталей різноманітних механізмів, а також можливості прогнозування їх надійності існує потреба у створенні адекватних математичних моделей руху тіл, що коливаються. Побудова математичної моделі руху осцилятора з урахуванням сухого тертя, а також подальша перевірка адекватності побудованої моделі, дає змогу визначити переміщення осцилятора у часі.

Аналіз останніх досліджень

Значна увага коливанням квадратично нелінійного осцилятора приділена в [1]. Там різними методами нелінійної механіки будували та порівнювали наближені розв'язки консервативної задачі. Точний розв'язок консервативної задачі для випадку чисто квадратичної нелінійності (без лінійної складової) в роботі [2] подано в двох формах. В першій використано еліптичні функції, а в другій – періодичні Ateb-функції та встановлено зв'язок між ними. Такі ж форми розв'язку побудовано в [3] для руху осцилятора при силовому імпульсному навантаженні. В [4] розглянуто вільні коливання при наявності у виразі сили пружності лінійної складової. Отримані результаті узагальнюють розв'язки роботи [2], хоча теж не враховують дію сил опору. Затухання вільних коливань, спричинене сухим тертям описано в [5], де без побудови розв'язку диференціального рівняння руху енергетичним методом виведено точне рекурентне співвідношення для обчислення розмахів коливань. Але в названій роботі не проводили визначення переміщень у часі, що потребує подальших досліджень.

Формулювання мети дослідження

Метою цієї статті є виведення та апробація формул для обчислення переміщення осцилятора під час руху та визначення тривалостей напівциклів коливань в умовах сухого тертя.

Результати досліджень

Розглянемо варіант симетричної силової характеристики відносно положення статичної рівноваги.

Рух осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c_1 x + c_2 |x| \cdot x + F_T \operatorname{sign}(\dot{x}) = 0 \tag{1}$$

з початковими умовами:

$$x(0) = -a_0;\ \dot{x}(0) = 0. \tag{2}$$

де в (1), (2)

m – маса осцилятора;

c_1, c_2 – коефіцієнти пружності;

F_T – сила сухого тертя;

$x(t)$ – переміщення осцилятора у часі t;

a_0 – стартове відхилення від положення рівноваги; крапка над x означає похідну по t.

Розмахи затухаючих коливань a_i вважаємо відомими, бо їх не складно обчислити за формулою [5]:

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = \sqrt[3]{s_i - 0{,}5q_i} - \sqrt[3]{s_i + 0{,}5q_i} - \frac{1}{3}\alpha_i, \tag{3}$$

де $s_i = \sqrt{\left(\frac{p_i}{3}\right)^3 + \left(\frac{q_i}{2}\right)^2}$;

$p_i = \beta_i - \frac{\alpha_i^2}{3}$;

$q_i = \frac{2}{27}\alpha_i^3 - \frac{1}{3}\alpha_i\,\beta_i + \beta_i - \alpha_i\ - 1$;

$\alpha_i\ = \frac{3c_1}{2c_2 a_{i-1}}$;

$\beta_i = \frac{3F_T}{c_2\left(a_{i-1}\right)^2}$;

$\left(\frac{p_i}{3}\right)^3+\left(\frac{q_i}{2}\right)^2 \geq 0$,

$i=1,2,\ldots$;

a_{i-1}, a_i – розмахи відповідно на початку і вкінці *i*-го напівциклу.

Якщо $\left(\frac{p_i}{3}\right)^3+\left(\frac{q_i}{2}\right)^2 < 0$, то:

$$\frac{a_i}{a_{i-1}}=-2\sqrt{-\frac{p_i}{3}}\cos\frac{\Theta+\pi}{3}-\frac{\alpha_i}{3},$$

де $\Theta=\arccos\left(-0{,}5q_i/\sqrt{-\left(p_i/3\right)^3}\right)$.

Визначення $x(t)$ будемо проводити окремо для жорсткої та м'якої силових характеристик.

1. Варіант жорсткої силової характеристики. Припустимо, що $c_1>0$, $c_2>0$ і розглянемо першу чверть циклу де $x\in\left[-a_0;0\right]$. На цій ділянці руху $x\leq 0$, $\dot{x}\geq 0$ і рівняння (1) має вигляд:

$$m\ddot{x}+c_1x-c_2x^2+F_T=0, \tag{4}$$

Переходом до нової невідомої $y=\dot{x}$; $\ddot{x}=y\frac{dy}{dx}$ рівняння (4) зводимо до рівняння першого порядку:

$$my\frac{dy}{dx}+c_1x-c_2x^2+F_T=0. \tag{5}$$

Проінтегрувавши його, з урахуванням того, що $y\left(-a_0\right)=0$, отримуємо:

$$y(x)=\frac{2c_2}{3m}\left(a_0+x\right)\left(A-Bx+x^2\right). \tag{6}$$

Тут $A=\frac{3}{2c_2}\left(c_1a_0+\frac{2}{3}c_1a_0^2-2F_T\right)$; $B=\frac{3}{2c_2}\left(c_1+\frac{2}{3}c_1a_0\right)$.

Подальше перетворення розв'язку (6) дає:

$$y(x)=\frac{2c_2}{3m}\left(a_0+x\right)\left[b_1^2-\left(x+a_0\right)\right]\left[b_2^2-\left(x+a_0\right)\right],$$

де:

$$b_1^2=\frac{B}{2}+\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2-A}+a_0;\; b_2^2=\frac{B}{2}-\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2-A}+a_0. \tag{7}$$

Другий інтеграл рівняння (4) має вигляд:

$$t=\int_{-a_{i-1}}^{x}\frac{dx}{\sqrt{y(x)}}=\frac{\sqrt{3m}}{\sqrt{2c_2}}\int_{-a_{i-1}}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\left(a_0+x\right)\left[b_1^2-\left(x+a_0\right)\right]\left[b_2^2-\left(x+a_0\right)\right]}}.$$

Переходом до нової змінної інтегрування $a_0 + x = u^2$ йому надаємо більш компактну форму:

$$t = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \int_0^{\sqrt{x+a_0}} \frac{du}{\sqrt{\left(b_1^2 - u^2\right)\left(b_2^2 - u^2\right)}}.$$

Згідно з [6] це неповний еліптичний інтеграл першого роду, тобто:

$$t = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \cdot \frac{1}{b_1} \mathrm{F}\left(\arcsin \frac{\sqrt{x + a_0}}{b_2}; \frac{b_2}{b_1} \right). \tag{8}$$

Таблиці неповного еліптичного інтегралу першого роду, що в правій частині в (8) є в [7, 8].

Тривалість руху t_{1*} на розглянутій ділянці становить:

$$t_{1*} = \frac{\sqrt{6m}}{b\sqrt{c_2}} \cdot \mathrm{F}\left(\arcsin \frac{\sqrt{a_0}}{b_2}; \frac{b_2}{b_1} \right).$$

Оскільки:

$$\mathrm{F}\left(\arcsin \frac{\sqrt{x + a_0}}{b_2}; \frac{b_2}{b_1} \right) = \tau = \frac{b_1\sqrt{c_2}}{\sqrt{6m}} t,$$

то переміщення осцилятора описується виразом:

$$x(t) = b_2^2 \,\mathrm{sn}^2\left(\tau; \frac{b_2}{b_1} \right) - \mathrm{a}_0, \tag{9}$$

де $\mathrm{sn}\left(\tau; \frac{b_2}{b_1} \right)$ – еліптичний синус Якобі.

Розглянемо далі другу чверть циклу, де $x \in [0; a_1]$. На цій ділянці руху $x \geq 0$, $\dot{x} \geq 0$ і рівняння (1) має вигляд:

$$my\frac{dy}{dx} + c_1 x + c_2 x^2 + F_T = 0. \tag{10}$$

Його розв'язок, що задовольняє умові $y(a_1) = 0$, подається виразом:

$$y(x) = \frac{2}{3}\frac{c_2}{m}(a_1 - x)\left(C + Dx + x^2\right)$$

у якому:

$$C = \frac{3}{2c_2}\left(c_1 a_1 + \frac{2}{3} c_1 a_1^2 + 2F_T \right);\; D = \frac{3}{2c_2}\left(c_1 + \frac{2}{3} c_2 a_1 \right). \tag{11}$$

Другий інтеграл рівняння руху зводиться до квадратури:

$$t - t_{1*} = \frac{\sqrt{3m}}{\sqrt{2c_2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a_1 - x)\left[\left(x + \frac{D}{2} \right)^2 + \left(C - \frac{D^2}{4} \right) \right]}}.$$

Цей інтеграл теж виражається через неповний еліптичний інтеграл першого роду. Користуючись довідником [6], отримуємо:

$$t-t_{1*}=\frac{\sqrt{3m}}{\sqrt{2\rho c_2}}\left[\mathrm{F}\left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{\rho}};r\right)-\mathrm{F}\left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a_1-x}}{\sqrt{\rho}};r\right)\right].$$

При цьому $\rho=\sqrt{a_1^2+Da_1+c}$; $d=\dfrac{D}{2}$; $r=\dfrac{\sqrt{\rho+d+a_1}}{\sqrt{2\rho}}$.

Обчислення тривалості напівциклу t_1 зводиться до використання формули:

$$t_1=t_{1*}+\frac{\sqrt{3m}}{\sqrt{2\rho c_2}}\mathrm{F}\left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{\rho}};r\right).$$

Якщо ввести позначення:

$$\xi=\mathrm{F}\left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{\rho}};r\right)-\frac{\sqrt{2\rho c_2}}{\sqrt{3m}}\left(t_1-t_{1*}\right),$$

то:

$$\mathrm{F}\left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a_1-x}}{\sqrt{\rho}};r\right)=\xi.$$

Звідси випливає формула переміщень осцилятора в другій чверті:

$$x(t)=a_1-\rho\frac{\operatorname{sn}^2(\xi;r)}{\operatorname{cn}^2(\xi;r)}, \tag{12}$$

Тут $\operatorname{sn}(\xi;r)$, $\operatorname{cn}(\xi;r)$ – еліптичний синус і еліптичний косинус.

Для обчислення значень цих функцій зручно користуватись формулами:

$$\operatorname{sn}(\xi;r)=\sin(\varphi/2);\ \operatorname{cn}(\xi;r)=\cos(\varphi/2); \tag{13}$$

$$\varphi=\frac{\pi\xi}{2\mathrm{K}}+2\left[\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\sin\frac{\pi\xi}{\mathrm{K}}}{1-\varepsilon\cos\frac{\pi\xi}{\mathrm{K}}}-\frac{\varepsilon^3}{1+\varepsilon^2}\sin\frac{\pi\xi}{\mathrm{K}}-\frac{\varepsilon^6}{2\left(1+\varepsilon^4\right)}\sin\frac{2\pi\xi}{\mathrm{K}}\right],$$

де $\varepsilon=\exp\left(-\pi\dfrac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right)$;

$\mathrm{K}=\mathrm{K}(r)$, $\mathrm{K}'=\mathrm{K}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$ – повні еліптичні інтеграли першого роду.

Отже для розрахунку переміщень за формулами (9), (12) треба мати таблицю повного еліптичного інтегралу першого роду. Вона надрукована в [7, 8] та інших виданих із спеціальних функцій.

З метою апробації виведених формул розглянемо приклад.

Приклад 1. Для проведення розрахунків приймаємо: $m=1$ кг; $c_1=10^3$ Н/м; $c_2=10^4$ Н/м²; $F_T=4$ Н; $a_0=0{,}05$ м. У першій чверті циклу значення допоміжних параметрів становить: $A=0{,}0088$ м²; $B=0{,}2$ м; $b_1^2=0{,}184641$ м; $b_2^2=0{,}115359$ м; $\dfrac{b_2}{b_1}=0{,}790427$; $\mathrm{F}\left(2\arcsin\dfrac{\sqrt{a_0}}{b_2};\dfrac{b_2}{b_1}\right)\approx 0{,}758749$; $t_{1*}\approx 0{,}043252$ с; $\varepsilon\approx 0{,}06097$;

$\mathrm{K}\left(b_2 / b_1\right) \approx 1,76066$. У другій чверті циклу розраховане по формулі (3) значення $a_1 = 0,0445703$ м. Решта параметрів становлять: $C = 0,009872$ м²; $D = 0,194570$ м; $\rho = 0,143285$ м; $d = 0,097285$ м; $r = 0,997502$; $\mathrm{F}\left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{\rho}};r\right) = 1,256798$; $t_1 = 0,083916$ с; $\mathrm{K}\left(r\right) = 4,04028$; $\mathrm{K}'\left(r\right) = 1,57257$; $\varepsilon \approx 0,29441$.

Результати обчислень $x\left(t\right)$ за формулами (9) і (11) записано в табл. 1, де для порівняння вказано також значення переміщень, одержані чисельним розв'язком задачі Коші (1), (2) на комп'ютері.

Таблиця 1

Переміщення осцилятора при $c_1 > 0$, $c_2 > 0$

$100t$, с	форм. (9)	чис. інт.	$100t$, с	форм. (11)	чис. інт.
	Значення $100x\left(t\right)$, м			Значення $100x\left(t\right)$, м	
1	-4,6508	-4,6508	5	1,1367	1,1374
2	-3,6696	-3,6697	6	2,6631	2,6635
3	-2,2309	-2,2310	7	3,8139	3,8141
4	-0,5579	-0,5581	8	4,4047	4,4047

Спостерігаються малі розбіжності значень $x\left(t\right)$, обчислених двома способами. Похибки реалізації аналітичного розв'язку пов'язані з наближеним обчисленням функції Якобі.

Формули, виведені для переміщень на першому напівциклі коливань елементарно поширити й на інші напівцикли, тому на цьому зупинятися не будемо, а розглянемо інший варіант нелінійної силової характеристики.

2. Варіант м'якої силової характеристики. Припустимо, що $c_1 > 0$, $c_2 < 0$, $c_1 + c_2 a_0 > 0$ і розглянемо першу чверть циклу, де $x \in \left[-a_0;0\right]$ на цій ділянці руху рівняння (5) має розв'язок:

$$y\left(x\right) = \frac{2\left|c_2\right|}{3m}\left(a_0 + x\right)\left[b_1^2 - \left(a_0 + x\right)\right]\left[b_3^2 + \left(a_0 + x\right)\right].$$

Тут $b_3^2 = \frac{\left|B\right|}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} - A - a_0}$; b_1^2 – визначається формулами (7), в яких $A < 0$ і $B < 0$.

Другий інтеграл рівняння руху має вигляд:

$$t = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{\left|c_2\right|}}\int_0^{\sqrt{x+a_0}}\frac{du}{\sqrt{\left(b_1^2 - u^2\right)\left(b_3^2 + u^2\right)}}$$

Він теж виражається через неповний еліптичний інтеграл першого роду. Згідно з [6]:

$$t = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{\left|c_2\right|}}\frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_3^2}}\mathrm{F}\left(\gamma;s\right) \qquad (14)$$

причому $\gamma = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x + a_0}}{b_1}\sqrt{\frac{b_1^2 + b_3^2}{b_3^2 + x + a_0}}\right)$; $s = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_3^2}}$.

Тривалість руху t_{1*} становить:

$$t_{1*} = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{|c_2|}} \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_3^2}} \mathrm{F}(\gamma_*; s),$$

де $\gamma_* = \arcsin\left(\frac{\sqrt{a_0}}{b_1} \sqrt{\frac{b_1^2 + b_3^2}{b_3^2 + a_0}} \right)$.

Уведенням позначення:

$$\sqrt{\frac{|c_2|\left(b_1^2 + b_3^2\right)}{\sqrt{6m}}} t = \eta,$$

виразу (13) надаємо компактний вигляд:

$$\mathrm{F}(\gamma; s) = \eta,$$

звідки випливає формула переміщень:

$$x(t) = \frac{b_3^2 \, \mathrm{s}^2 \mathrm{sn}^2(\eta;\, s)}{1 - \mathrm{s}^2 \mathrm{sn}^2(\eta;\, s)} - a_0. \tag{15}$$

Для обчислення значень еліптичного синуса $\mathrm{sn}(\eta;\, s)$ придатна формула (12).

Розглянемо далі рух на другій чверті циклу, де $x \in [0; a_1]$. На цій ділянці руху рівняння (10) має розв'язок:

$$y(x) = \frac{2|c_2|}{3m}(a_1 - x)\left[d_1^2 - (a_1 - x)\right]\left[d_2^2 + (a_1 - x)\right].$$

Тут $d_1^2 = \sqrt{\frac{D^2}{4} - C} + \frac{D}{2} + a_1$; $d_2^2 = \sqrt{\frac{D^2}{4} - C} - \frac{D}{2} - a_1$, а $C < 0$; $D < 0$ – визначені в (11).

Другий інтеграл рівняння руху подається виразом:

$$t - t_{1*} = \frac{\sqrt{3m}}{\sqrt{2|c_2|}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a_1 - x)\left[d_1^2 - (a_1 - x)\right]\left[d_2^2 + (a_1 - x)\right]}}.$$

Після переходу до нової змінної інтегрування $a_1 - x = u^2$, отримуємо квадратуру:

$$t - t_{1*} = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{|c_2|}} \int_{\sqrt{a_1 - x}}^{\sqrt{a_1}} \frac{du}{\sqrt{\left(d_1^2 - u^2\right)\left(d_1^2 + u^2\right)}},$$

яка виражається через неповний еліптичний інтеграл першого роду [6]. Тому:

$$t - t_{1*} = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{|c_2|}} \frac{1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} \left[\mathrm{F}(\delta; h) - \mathrm{F}(\delta_*; h)\right], \tag{16}$$

де $\delta = \arccos\dfrac{\sqrt{a_1 - x}}{d_1}$; $\delta_* = \arccos\dfrac{\sqrt{a_1}}{d_1}$; $h = \dfrac{d_1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$.

Із (16) випливає наступна формула тривалості напівциклу:

$$t = t_{1*} + \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{|c_2|}\cdot\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}\left[\mathrm{K}(h) - \mathrm{F}(\delta_*;h)\right].$$

Тут $\mathrm{K}(h)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

Уведенням позначення:

$$\varsigma = \frac{\sqrt{|c_2|\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}}{\sqrt{6m}}(t - t_{1*}) + \mathrm{F}(\delta_*;h),$$

формулі (16) надаємо компактний вигляд:

$$\mathrm{F}(\delta;h) = \varsigma.$$

Її інверсія призводить до формули переміщень осцилятора:

$$x(t) = a_1 - d_1^2\,\mathrm{cn}^2(\varsigma;\,h). \tag{17}$$

Для обчислення значень еліптичного косинуса придатна формула (13), що зводить розрахунок до обчислень елементарних функцій.

Приклад 2. За вихідні дані приймаємо ті числа, що й в прикладі 1, змінивши лише знак коефіцієнта c_2 на протилежний. У першій чверті циклу маємо: $a_0 = 0,05$ м; $A = -0,0038$ м²; $B = -0,1$ м; $b_1^2 = b_3^2 = 0,0793725$ м; $s = 1/\sqrt{2}$; $\gamma_* = 1,0741437$; $\mathrm{F}(\gamma_*, s) = 1,17667$; $\mathrm{K}(s) = \mathrm{K}'(s) = 1,8541$; $\varepsilon = 0,043214$; $t_{1*} = 0,07234$ с. У другій чверті циклу розрахунок дає: $a_1 = 0,035884$ м; $C = -0,0052949$ м²; $D = -0,114116$ м; $d_1^2 = 0,071295$ м; $d_2^2 = 0,0113643$ м; $h = 0,620893$; $\delta_* = 0,782081$; $\mathrm{F}(\delta_*;h) = 0,81204$; $\mathrm{K}(h) = 1,76759$; $\mathrm{K}'(h) = 1,96551$; $\varepsilon = 0,03040$; $t_1 = 0,126768$ с.

Результати обчислень $x(t)$ за формулами (15) і (17) та чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері записано в табл. 2.

Таблиця 2

Переміщення осцилятора при $c_1 > 0$, $c_2 < 0$

$100t$, с	форм. (15)	чис. інт.	$100t$, с	форм. (17)	чис. інт.
	Значення $100x(t)$, м			Значення $100x(t)$, м	
1	-4,8950	-4,8950	8	0,8425	0,8423
2	-4,5802	-4,5802	9	1,8346	1,8345
3	-4,0577	-4,0577	10	2,6393	2,6391
4	-3,3350	-3,3350	11	3,2114	3,2113
5	-2,4317	-2,4316	12	3,5266	3,5266
6	-1,3865	-1,3864	$100t_1$	3,5884	3,5884
7	-0,2644	-0,2643	–	–	–

Маємо гарну узгодженість результатів, отриманих двома способами і при м'якій силовій характеристиці осцилятора.

Виведені вище формули переміщення осцилятора на першому напівциклі вільних коливань легко поширити і на інші напівцикли.

Висновки

Диференціальне рівняння вільних коливань осцилятора з квадратично нелінійною силовою характеристикою та сухим тертям має точні аналітичні розв'язки, що виражаються через еліптичні функції Якобі. Проведене додаткове чисельне інтегрування рівняння руху на комп'ютері підтверджено вірогідність виведених аналітичних формул для розрахунку переміщень осцилятора з плином часу.

Список використаних джерел

1. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху. Київ.: Вища школа, 2004. 525.

2. Ольшанський В.П. Про коливання осцилятора з квадратично нелінійною жорсткістю / В.П. Ольшанський, В.В. Бурлака, М.В. Сліпченко, О.М. Малець / Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів. – 2017. – № 8. – С. 177-185.

3. Ольшанський В.П. Коливання квадратично-нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням. / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський / Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – 2017. – № 39 (1261). – С. 62-67.

4. Olshanskiy V., Olshanskiy S., Slipchenko M. On free oscillation of a quadratic nonlinear oscillation / V. Olshanskiy, S. Olshanskiy, M. Slipchenko / Ukrainian journal of mechanical engineering and material science. – 2017. – V. 3, No 2. – P. 1-10.

5. Ольшанський В. П., Сліпченко М. В., Спольнік О. І., Бурлака В. В. Нелінійні коливання дисипативних осциляторів. Харків : КП Міська друкарня, 2020. 268.

6. Градштейн И. С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва : Наука, 1962. 1100 с.

7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Москва : Наука, 1977. 344.

References

1. Vasylenko M.V., Alekseychuk O.M. Theory of oscillations and stability of motion. Moskow, Drofa. 2004.

2. Olshanskiy V.P. On oscillations of an oscillator with quadratically nonlinear stiffness / V.P. Olshanskiy, V.V. Burlaka, M.V. Slipchenko, O.M. Malec / Technical service of agroindustrial, forest and transport complexes. – 2017 – Issue. 8, pp. 177-185.

3. Olshanskiy V.P. Oscillations of a quadratic-nonlinear oscillator caused by a pulse load / V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy / Bulletin of NTU KhPI. Series: Dynamics and strength of machines. – KhPI, 2017 – Issue. 39 (1261), pp. 62-67.

4. Olshanskiy V. On free oscillation of a quadratic nonlinear oscillation / V. Olshanskiy, S. Olshanskiy, M. Slipchenko / On free oscillation of a quadratic nonlinear oscillation. Ukrainian journal of mechanical engineering and material science. – 2017 – Vol. 3, No 2. – pp. 1-10.

5. Olshanskiy V.P., Slipchenko M. V., Burlaka V.V., Spolnik O.I. Nonlinear oscillations of dissipative oscillators. City Printing House, Kharkiv, 2020.

6. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. Science, Moscow, 1962.

7. Yanke E., Emde F., Lyosh F. Special functions. Science, Moscow, 1977.