Гринченко О.С.
nadezhnost@ukr.net
Юр'єва Г.П.
Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П.Василенка
anna.yirueva@yandex.ua

ПРОГНОЗУВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ НАДІЙНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ У ВИПАДКУ ПУАССОНІВСЬКИХ ПОТОКІВ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

УДК 62-192.642.041

В статті розглянуті стохастичні моделі прогнозування ймовірності безвідмовної роботи. Отримані аналітичні вирази для прогнозування показників механічної надійності елементів машин.

Ключові слова: раптова відмова, розподіл, коефіцієнт варіації, інтенсивність відмов, коефіцієнт запасу, несівна здатність.

Вступ. Раптові механічні відмови елементів і систем в машинах [1] і конструкціях в основному бувають обумовлені випадковими екстремальними навантаженнями, які можуть стрибкоподібно хоча б раз перевищити несівну здатність і призвести до квазістатичного руйнування або виникнення неприпустимих залишкових деформацій. Несівну здатність кожного з елементів слід також вважати випадковими величинами і тому закономірності виникнення раптових механічних відмов є стохастичними. Істотною ознакою раптової механічної відмови є те, що її ризик можна вважати не залежним від накопиченого раніше пошкодження і передісторії навантаження елемента.

Забезпечення надійності елементів машин від раптових механічних відмов при традиційному детермінованому підході до проектувальних розрахунків до останнього часу зводиться до використання коефіцієнтів запасу міцності [2], призначення яких полягає в тому, щоб враховувати й компенсувати вплив різних випадкових факторів на механічні характеристики матеріалів і величину діючих експлуатаційних навантажень. Тим самим фактично визнається наявність впливу випадковості при забезпеченні надійності, проте для врахування цього впливу імовірнісні моделі і методи не використовуються. Коефіцієнти запасу міцності (безпеки) задаються в нормативних технічних документах або стандартах, що використовуються в різних галузях машинобудування. Їх величину зазвичай встановлюють емпіричним шляхом на основі експертного аналізу або узагальнення попереднього досвіду проектування і експлуатації виробів аналогічного призначення.

Основна частина. Підхід до запровадження імовірнісних моделей, який дає можливість отримання практично корисних результатів, полягає в заданні виду і параметрів припущеного закону розподілу екстремальних навантажень. При цьому доцільно використовувати функції розподілів неперервних додатних випадкових величин з унімодальною щільністю і нескінченної верхньою межею випадкового розсіювання. Зважаючи на те, що єдиним і найбільш зручним параметром, що задає рівень випадкового розсіювання навантаження або несівної здатності при машинобудівних розрахунках [3] є безрозмірний коефіцієнт варіації, переважніше застосовувати двухпараметричні закони розподілу. В подальшому при побудові моделей широко використовуються: закон розподілу Вейбулла, а також логарифмічно логістичний [4] і розподіл Фреше [5]. Традиційним є застосування нормального [3], логарифмічно нормального [6] та подвійного експоненціального [7] розподілів.

Функція розподілу $F(P)$ логарифмічно логістичного закону і щільність розподілу $f(P)$ мають вигляд:

$$F(P)=\frac{\left(P/C\right)^{\nu}}{1+\left(P/C\right)^{\nu}};\qquad f(P)=\frac{\nu\left(P/C\right)^{\nu-1}}{C\left[1+\left(P/C\right)^{\nu}\right]^{2}},\tag{1}$$

де C - параметр масштабу, який є медіаною розподілу; ν - параметр форми, що однозначно визначає коефіцієнт варіації.

Середнє значення випадкової величини P при $\nu>1$ визначається за формулами:

$$\overline{P}=C\cdot\Gamma\left(1+1/\nu\right)\cdot\Gamma\left(1-1/\nu\right)=\frac{C\cdot\pi}{\nu\cdot\sin\frac{\pi}{\nu}}.\tag{2}$$

Коефіцієнт варіації при $\nu>2$ визначається з виразів

$$V=\sqrt{\frac{\Gamma\left(1+2/\nu\right)\cdot\Gamma\left(1-2/\nu\right)}{\Gamma^{2}\left(1+1/\nu\right)\cdot\Gamma^{2}\left(1-1/\nu\right)}-1}=\sqrt{\frac{\nu}{\pi}tg\frac{\pi}{\nu}-1}.\tag{3}$$

Для оцінки величини параметру форми ν за коефіцієнтом варіації V при $V\le 0{,}5$ може бути використана наближена формула

$$\nu\approx\pi\left[\left(1-0{,}3V^{11/3}\right)\sqrt{3{,}75\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{8}{15}V^{2}}-1{,}25}\right]^{-1}\tag{4}$$

При $\nu>1$ модальне (найбільш імовірне) значення величини P визначається з виразу

$$\hat{P}=C\left(\frac{1-1/\nu}{1+1/\nu}\right)^{1/\nu}.\tag{5}$$

У випадку закону Фреше, який є одним з граничних законів розподілу максимумів, функція розподілу і щільність мають вигляд:

$$F(P)=\exp\left[-\left(\frac{h}{P}\right)^{\rho}\right];\qquad f(P)=\frac{\rho}{P}\left(\frac{h}{P}\right)^{\rho}\exp\left[-\left(\frac{h}{P}\right)^{\rho}\right],\tag{6}$$

де h - параметр масштабу; ρ - параметр форми, який однозначно залежить від коефіцієнту варіації.

Середнє значення і коефіцієнт варіації розподілу Фреше розраховуються за формулами:

$$\overline{P}=h\Gamma\left(1-1/\rho\right)=\frac{h\pi}{\rho\sin\left(\pi/\rho\right)\cdot\Gamma\left(1+1/\rho\right)},\qquad \textit{якщо}\ \rho>1.\tag{7}$$

$$V=\sqrt{\frac{\Gamma\left(1-2/\rho\right)}{\Gamma^{2}\left(1-1/\rho\right)}-1}=\sqrt{\frac{2\rho\left[\sin\left(\pi/\rho\right)\cdot\Gamma\left(1+1/\rho\right)\right]^{2}}{\pi\sin\left(2\pi/\rho\right)\cdot\Gamma\left(1+2/\rho\right)}-1},\quad \textit{якщо}\ \rho>2.\tag{8}$$

Медіана розподілу визначається за виразом

$$P_{0,5}=h/\left(\ln 2\right)^{1/\rho}\tag{9}$$

Модальне значення дає формула

$$\hat{P} = h\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{1/\rho}. \tag{10}$$

Отже, параметр масштабу знаходиться в інтервалі: $\hat{P} < h < P_{0,5}$ і із зростанням параметру форми ρ цей інтервал звужується.

У двопараметричного розподілу Вейбулла середнє значення і коефіцієнт варіації визначаються з виразів

$$\overline{P} = a\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right); \tag{11}$$

$$V = \sqrt{\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{b}\right)} - 1}. \tag{12}$$

де a - параметр масштабу; b – параметр форми.

Оцінку параметра форми b за коефіцієнтом варіації у випадку, коли $0{,}08 \le V \le 0{,}5$ можна наближено здійснювати [8] за формулою:

$$b \approx \frac{1{,}25}{V} - 0{,}4. \tag{13}$$

В більш широкому діапазоні значень коефіцієнта варіації при $0{,}08 \le V \le 1$ можна використовувати запропоновану в [9] наближену формулу:

$$b \approx \frac{1{,}126}{V} + \frac{0{,}011}{V^2} - 0{,}137. \tag{14}$$

При $0{,}06 \le V \le 0{,}4$ між параметрами форми законів Фреше та Вейбулла справедлива наближена залежність: $\rho \approx b + 1{,}47$.

Медіана закону Вейбулла визначається з виразу:

$$P_{0,5} = a(\ln 2)^{1/b}. \tag{15}$$

Модальне значення при b>1 визначається за формулою:

$$\hat{P} = a\left(\frac{b-1}{b}\right)^{1/b}.$$

В таблиці 1 наведені деякі довідкові дані відносно параметрів форми законів Вейбулла, Фреше и логарифмічно логістичного в залежності від коефіцієнта варіації.

Подвійний експоненційний розподіл максимумів має функцію та щільність у вигляді

$$F(P) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{P-\omega}{\beta}\right)\right\}; \tag{16}$$

$$f(P) = \frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{P-\omega}{\beta}\right)\cdot F(P), \tag{17}$$

де ω - параметр, що збігається з модальним значенням.

Середнє значення визначається формулою

$$\overline{P} = \omega + \beta C_o, \tag{18}$$

де C_o = 0,5772156... – стала Ейлера.

Коефіцієнт варіації визначається з виразу

$$V = \frac{\pi\beta}{\sqrt{6}\left(\omega + \beta C_o\right)}. \tag{19}$$

Таблиця 1.

Величина параметрів форми у двопараметричних розподілів

Вид розподілу	Параметри форми	Коефіцієнт варіації V								
		0,06	0,08	0,10	0,12	0,20	0,30	0,35	0,40	1,00
Вейбулла	b	20,6 8	15,3 5	12,15	10,03	5,80	3,71	3,13	2,70	1,00
Фреше	ρ	22,1 4	16,8 1	13,62	11,50	7,26	5,18	4,60	4,17	2,53
Логарифмічно логістичний	ν	30,3	22,7 6	18,25	15,25	9,28	6,36	5,55	4,95	2,70

Якщо функція розподілу навантаження при будь-якому екстремальному навантаженні $F(P_н)$ задана і не залежить від напрацювання і числа екстремальних навантажень m, а P_0 – сталий (детермінований) граничний рівень несівної здатності елемента, то ймовірність безвідмовної роботи при одноразовому (першому) навантаженні елемента може бути визначена, як ймовірність того, що $P_н < P_о$ або

$$R_1 = F(P_о). \tag{20}$$

У загальному випадку при m екстремальних навантаженнях ймовірність безвідмовної роботи визначається ймовірністю того, що умовний максимум m-кратного навантаження $P_{max}(m) = \max(P_{н1},..., P_{нm})$ не перевищить сталий граничний рівень $P_о$ несівної здатності елемента. З результатів теорії екстремальних значень випадкових величин [7] відомо, що функції розподілу умовних максимумів $F(P_{max}(m))$ і навантаження $F(P_н)$ повинні бути пов'язані залежністю.

$$F(P_{max}(m)) = F^m(P_н). \tag{21}$$

Тоді ймовірність безвідмовної роботи елемента при m екстремальних навантаженнях визначається виразом

$$R_m = F^m(P_о) = R_1^m = (1 - Q_1)^m. \tag{22}$$

Q_1 - імовірність відмови при першому навантаженні.

З (22) випливає, що число екстремальних навантажень m до раптової механічної відмови при детермінованому постійному граничному рівні несучої здатності елемента має дискретний геометричний розподіл [10]. Функція ймовірності (дискретна щільність) цього розподілу:

$$f(m) = Q_1(1 - Q_1)^{m-1}. \tag{23}$$

Середнє число екстремальних навантажень до відмови:

$$\overline{m} = \frac{1}{Q_1}. \tag{24}$$

При цьому дискретний аналог інтенсивності раптових відмов визначається виразом: $\lambda = Q_1$ і не залежить від m.

Виходячи з того, що при детермінованому (невипадковому) граничному рівні несівної здатності елемента число навантажень до раптової відмови має геометричний розподіл, можна, використовуючи різні закони розподілу випадкового навантаження, отримувати аналітичні вирази для прогнозування показників механічної надійності. Покажемо застосування такого підходу на прикладі використання двопараметричного закону Вейбулла. Нехай функція розподілу навантаження має вигляд

$$F(P_{\text{н}}) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{P_{\text{н}}}{a_{\text{н}}}\right)^{b_{\text{н}}}\right]. \tag{25}$$

Тоді ймовірність безвідмовної роботи при першому екстремальному навантаженні у відповідності з (20) визначається з виразу:

$$R_1 = 1 - \exp\left[-\left(\frac{P_{\text{о}}}{a_{\text{н}}}\right)^{b_{\text{н}}}\right]. \tag{26}$$

З урахуванням (11) параметр масштабу $a_{\text{н}}$ виражається за допомогою середнього значення екстремального навантаження $\overline{P}_{\text{н}}$ за формулою:

$$a_{\text{н}} = \frac{\overline{P}_{\text{н}}}{\Gamma\left(1 + 1/b_{\text{н}}\right)}. \tag{27}$$

Після підстановки (27) у (26), враховуючи, що коефіцієнт запасу визначається відношенням $K = P_o / \overline{P}_{\text{н}}$, отримаємо вираз для ймовірності безвідмовної роботи при першому навантаженні в залежності від коефіцієнта запасу:

$$R_1(K) = 1 - \exp\left\{-\left[K\Gamma\left(1 + 1/b_{\text{н}}\right)\right]^{b_{\text{н}}}\right\}. \tag{28}$$

Відповідно, ймовірність відмови при першому навантаженні Q_1 визначається з виразу

$$Q_1(K) = \exp\left\{-\left[K\Gamma\left(1 + 1/b_{\text{н}}\right)\right]^{b_{\text{н}}}\right\}. \tag{29}$$

З урахуванням (24) із (29) отримуємо, що середнє число навантажень до раптової відмови визначається за формулою:

$$\overline{m} = \exp\left\{\left[K\Gamma\left(1 + 1/b_{\text{н}}\right)\right]^{b_{\text{н}}}\right\}. \tag{30}$$

Враховуючи (22) і використовуючи (28) можна отримати рівняння для визначення коефіцієнта запасу $K_\gamma(m)$, який забезпечить задану ймовірність безвідмовної роботи при відомому числі m екстремальних навантажень елемента:

$$\exp\left\{-\left[K_\gamma(m) \cdot \Gamma\left(1 + 1/b_{\text{н}}\right)\right]^{b_{\text{н}}}\right\} = 1 - \gamma^{1/m}. \tag{31}$$

Перехід у вимірі обсягу вироблюваного ресурсу від числа екстремальних навантажень m до напрацювання t можна виконати, прийнявши певні припущення про вигляд випадкового потоку дискретних моментів часу навантажень. У багатьох випадках, припускаючи незалежність випадкових напрацювань до навантажень t_1, t_2,...t_m прийнятно допущення про стаціонарний пуассонівський потік, при якому щільність розподілу числа навантажень i за напрацювання t має вигляд

$$P_i(t) = \frac{e^{-\frac{t}{T_o}}}{i!} \cdot \left(\frac{t}{T_o}\right)^i, \tag{32}$$

де T_o - середній період між випадковими навантаженнями.

Тоді маємо вираз для ймовірності безвідмовної роботи залежно від коефіцієнта запасу і напрацювання:

$$R(K,t) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t)\, R_i(K), \tag{33}$$

де відповідно до (22) $R_i(K) = (R_1(K))^i$.

З (32) і (33) випливає, що напрацювання до раптової відмови в цьому випадку має експоненційний розподіл, а ймовірність безвідмовної роботи визначається за виразом:

$$R(K,t) = \exp\left(-\frac{t}{T_o}(1 - R_1(K))\right). \tag{34}$$

При цьому середнє напрацювання до відмови визначається за формулою

$$T = \frac{T_o}{1 - R_1(K)} = \overline{m} T_o, \tag{35}$$

а інтенсивність відмов не залежить від напрацювання і є постійною величиною:

$$\lambda = \frac{1 - R_1(K)}{T_o} = (1 - R_1(K))\, \omega_o, \tag{36}$$

де $\omega_o = 1/T_o$ - постійна інтенсивність екстремальних навантажень.

Гамма-відсоткове напрацювання до раптової відмови можна визначити за формулою

$$t_\gamma(K) = \frac{T_o \ln 1/\gamma}{1 - R_1(K)} = T \ln 1/\gamma. \tag{37}$$

У загальному випадку пуассонівського потоку екстремальних навантажень щільність розподілу числа навантажень при напрацюванні *t* визначається за формулою

$$P_i(t) = \frac{e^{-\overline{m}(t)} \cdot (\overline{m}(t))^i}{i!}, \tag{38}$$

де $\overline{m}(t)$ - середнє сумарне число екстремальних навантажень за напрацювання *t*.

При стаціонарному потоці $\overline{m}(t) = \omega_o t$ і, отже, сумарне число навантажень є лінійною функцією напрацювання. В загальному випадку зв'язок між $\overline{m}(t)$ і змінною інтенсивністю $\omega(t)$ навантажень має вигляд

$$\overline{m}(t) = \int_0^t \omega(t)\, dt. \tag{39}$$

Якщо сумарне середнє нестаціонарного пуассонівського потоку $\overline{m}(t)$ є монотонно зростаючою степеневою функцією напрацювання $\overline{m}(t) = \omega_o t^\nu$, то змінна інтенсивність навантажень має вигляд:

$$\omega(t) = \frac{d\overline{m}(t)}{dt} = \omega_o \nu\, t^{\nu - 1}. \tag{40}$$

Виходячи з (38) з використанням (33) отримаємо вираз для ймовірності безвідмовної роботи у вигляді:

$$R(K,t) = \exp\{-(1 - R_1(K))\omega_o t^\nu\}. \tag{41}$$

Вираз (41) свідчить про те, що в цьому випадку напрацювання до раптової відмови має розподіл Вейбулла з параметром форми ν. Випадковий пуассонівський потік екстремальних навантажень з інтенсивністю виду (40) називають [11, 12] потоком Вейбулла. Середнє напрацювання до відмови визначається за допомогою виразу

$$T = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}{\left[\omega_o\left(1-R_1(K)\right)\right]^{\frac{1}{\nu}}}. \tag{42}$$

Гамма-відсоткове напрацювання до відмови визначається за формулою

$$t_\gamma = \left\{\frac{\ln \frac{1}{\gamma}}{\omega_o\left(1-R_1(K)\right)}\right\}^{\frac{1}{\nu}}. \tag{43}$$

З (41) випливає, що залежність інтенсивності відмов від напрацювання має вигляд:

$$\lambda(t) = \omega_o \nu\left(1-R_1(K)\right)t^{\nu-1}. \tag{44}$$

При $\nu > 1$ інтенсивність відмов і інтенсивність навантажень, буде зростаючою функцією напрацювання, а при $\nu < 1$ буде монотонно спадати. Отже, при геометричному розподілі числа екстремальних навантажень до раптової відмови і пуассонівському потоку навантажень характер монотонної зміни інтенсивності відмов в залежності від напрацювання повністю визначається характером зміни відповідної інтенсивності екстремальних навантажень. Інтенсивність відмов при цьому знижується за рахунок множника $1-R_1(K)$, що залежить від коефіцієнту запасу, виду розподілу і коефіцієнту варіації навантаження. Збільшення коефіцієнту запасу призводить до "розрідження" потоку відмов порівняно з потоком навантажень.

Висновок. Розглянуті стохастичні моделі прогнозування ймовірності безвідмовної роботи, які дозволяють проводити інженерний аналіз та вибирати раціональний варіант забезпечення необхідного рівня надійності. Запропонована загальна методика побудови моделей прогнозування показника надійності елементів машин за раптовими механічними відмовами у випадку стаціонарного та нестаціонарного пуассонівських потоків екстремальних навантажень.

Література

1. В.Я. Анилович, А.С. Гринченко, В.П. Литвиненко, Прогнозирование надежности тракторов-М.: Машиностроение, 1986.- 224 с.
2. Решетов Д.Н. Детали машин. – М.: Машиностроение, 1989. – 496 с.
3. Решетов Д.Н., Иванов А.С., Фадеев В.З. Надежность машин. М.: Высш. шк., 1986. 238 с.
4. Кокс Д.Р., Оукс Д. Анализ данных типа времени жизни/ М.: Финансы и статистика, 1988. - 192 с.
5. G.Upton, I.Cook. Oxford dictionary of Statistics. 2008. - 453 p.
6. Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.
7. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. – М.: Мир, 1965. – 452с.
8. Визир П.Л. Надежность элемента системы. –В кн.: Нагрузки и надежность строительных конструкций. Труды ЦНИИСК, вып. 21, М., 1973.- С. 26-42
9. Гринченко А.С. Модели прогнозирования прочностной надежности элементов машин при однократном разрушении/ Вісник ХДТУСГ, Харків, 2000. – Вип. 4. – С. 21-27.

10. Джонсон Н.Л. Одномерные дискретные распределения/ Н.Л. Джонсон, С. Коц, А.У. Кемп. - М.: Бином. 2012. - 559 с.
11. Богданофф Дж., Козин Ф. Вероятностные модели накопления повреждения. - М.: Мир, 1989. - 344 с.
12. Джонсон Н.Л. Одномерные непрерывные распределения: в 2 ч./ Н.Л.Джонсон, С. Коц, Н. Балакришнан; - М.: Бином. Ч.1. 2010. - 703 с.

Grinchenko A., Yureva A. **Prediction of reliability of mechanical elements in the case poisonville flows extreme loads**

The article describes a stochastic model predicting the probability of failure-free operation. Analytical expressions are obtained for the forecasting performance of the mechanical reliability of machine elements.

Key words: sudden failure, the distribution, the coefficient of variation, failure rate, safety factor, bearing capacity.

References

1. V.Ya. Anilovich, A.S. Grinchenko, V.P. Litvinenko, Prognozirovanie nadezhnosti traktorov-M.: Mashinostroenie, 1986.- 224 c.
2. Reshetov D.N. Detali mashin. – M.: Mashinostroenie, 1989. – 496 s.
3. Reshetov D.N., Ivanov A.S., Fadeev V.Z. Nadezhnost mashin. M.: Vyissh. shk., 1986. 238 s.
4. Koks D.R., Ouks D. Analiz dannyih tipa vremeni zhizni/ M.: Finansyi i statistika, 1988. - 192 s.
5. G.Upton, I.Cook. Oxford dictionary of Statistics. 2008. - 453 p.
6. Rzhanitsyin A.R. Teoriya rascheta stroitelnyih konstruktsiy na nadezhnost. M.: Stroyizdat, 1978. – 239 s.
7. Gumbel E. Statistika ekstremalnyih znacheniy. – M.: Mir, 1965. – 452s.
8. Vizir P.L. Nadezhnost elementa sistemyi. –V kn.: Nagruzki i nadezhnost stroitelnyih konstruktsiy. Trudyi TsNIISK, vyip. 21, M., 1973.- S. 26-42
9. Grinchenko A.S. Modeli prognozirovaniya prochnostnoy nadezhnosti elementov mashin pri odnokratnom razrushenii/ VIsnik HDTUSG, HarkIv, 2000. – Vip. 4. – S. 21-27.
10. Dzhonson N.L. Odnomernyie diskretnyie raspredeleniya/ N.L. Dzhonson, S. Kots, A.U. Kemp. - M.: Binom. 2012. - 559 s.
11. Bogdanoff Dzh., Kozin F. Veroyatnostnyie modeli nakopleniya povrezhdeniya. - M.: Mir, 1989. - 344 s.
12. Dzhonson N.L. Odnomernyie nepreryivnyie raspredeleniya: v 2 ch./ N.L.Dzhonson, S. Kots, N. Balakrishnan; - M.: Binom. Ch.1. 2010. - 703 s.