Гринченко А.С.,
Алферов А.И.
Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П.Василенко, г. Харьков, Украина
E-mail: nadezhnost@ukr.net

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН ПРИ СЛУЧАЙНОМ ПУАССОНОВСКОМ ПОТОКЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ НАГРУЖЕНИЙ

УДК 62-192.624.041

Получены модели прогнозирования надежности при внезапных механических отказах, построенные для случая пуассоновского потока экстремальных нагружений. Выявлены закономерности, присущие интенсивности внезапных механических отказов.

Ключевые слова: *экстремальное нагружение, внезапный отказ, интенсивность отказа, пуассоновский поток, прогнозирование надежности.*

Постановка задачи

Внезапные механические отказы элементов и систем в мобильных машинах в основном бывают обусловлены многократно повторяющимися случайными экстремальными нагрузками, которые могут скачкообразно хотя бы раз превысить несущую способность и привести к квазистатическому разрушению или возникновению недопустимых остаточных деформаций. Несущую способность каждого из элементов по этому виду отказов следует также считать случайной величиной и поэтому закономерности возникновения внезапных механических отказов являются стохастическими. Существенным признаком внезапного механического отказа является то, что его риск не связан с накоплением повреждений и не зависит от предыстории нагружения элемента, которая не сказывается на несущей способности.

Применение вероятностных моделей прогнозирования надежности сопровождается привлечением информации о характеристиках случайного рассеивания несущей способности элементов и действующих экстремальных нагрузок, т.е. нагрузок, которые потенциально способны привести к внезапному разрушению или недопустимым деформациям. При прогнозировании надежности по внезапным механическим отказам необходимо учитывать, что последовательность экстремальных нагружений в условиях эксплуатации сельскохозяйственной и другой мобильной техники является случайной, как по величине действующих нагрузок, так и по моментам их возникновения. Следовательно, задача прогнозирования надежности должна решаться для условий воздействия случайного потока многократно повторяющихся экстремальных нагружений.

Анализ публикаций

Модели надежности, основанные на использовании пуассоновских потоков случайных воздействий рассматривались в работах [1, 2]. Однако, полученные в них результаты ограничивались общей постановкой задач без рассмотрения конкретных вариантов распределений случайных действующих нагрузок и величины несущей способности элементов. Это не позволило получить рекомендации, пригодные для практического использования в решении инженерных задач по обеспечению надежности при механических отказах.

Целью работы является совершенствование теоретических методов построения моделей прогнозирования надежности при внезапных механических отказах, которые позволяют решать инженерные задачи обеспечения требуемого уровня безотказности элементов машин на этапе проектирования.

Прогнозирование при пуассоновском потоке нагружений

Прогнозирование показателей надежности в зависимости от наработки целесообразно проводить в предположении, что случайный поток экстремальных нагружений является пуассоновским, при котором плотность распределения случайного числа нагружений *i* определяется выражением.

$$P_i(t) = \frac{e^{-\bar{m}(t)}\left(\bar{m}(t)\right)^i}{i!}, \tag{1}$$

где $\overline{m}(t)$ - среднее суммарное число экстремальных нагружений за наработку *t*.

Тогда вероятность безотказной работы можно определять с помощью выражения вида,

$$R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t) R_i, \tag{2}$$

в котором при наличии случайного рассеивания несущей способности условные вероятности R_i определяются из выражений вида

$$R_i = \int_0^{\infty} F^i(P)\, g(P)\, dP = \int_0^1 F_1^i(G)\, dG. \tag{3}$$

где $F(P)$ - функция распределения экстремальных нагрузок;

$g(P)$ - плотность распределения несущей способности;

G - функция распределения несущей способности;

$F_1(G)$ - функция единичного распределения нагрузки [3].

Подставляя (1) и (3) в (2), получим:

$$R(t) = \int_0^{\infty} g(P) e^{-\bar{m}(t)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\bar{m}(t)\right)^i F^i(P)}{i!} dP. \tag{4}$$

Следуя [2], можно заменить входящую в (4) сумму ряда экспонентой и получить общий вид выражения для вероятности безотказной работы в зависимости от наработки:

$$R(t) = e^{-\bar{m}(t)} \int_0^{\infty} e^{\bar{m}(t) F(P)} g(P)\, dP. \tag{5}$$

Переходя в (5) к единичным распределениям, получим более простую форму выражения для вероятности безотказной работы:

$$R(t) = e^{-\bar{m}(t)} \int_0^1 e^{\bar{m}(t) F_1(G)}\, dG. \tag{6}$$

Если поток экстремальных нагружений стационарный с постоянной интенсивностью $\omega_о = 1/T_o$, то исходя из (6), вероятность безотказной работы определяется выражением

$$R(t) = e^{-\omega_o t} \int_0^1 e^{\omega_o t F_1(G)}\, dG. \tag{7}$$

Входящая в (7) функция единичного распределения нагрузки $F_1(G)$ зависит как от вида распределений нагрузки и несущей способности, так и от величины их параметров. Например, в случае неблагоприятного в смысле надежности сочетания распределений Фреше для нагрузки и Вейбулла для несущей способности имеем следующее выражение этой функции:

$$F_1(G) = \exp\left\{ -\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)}{\bar{K}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} \right)^{\rho} \left[-\ln\left(1-G\right) \right]^{-\rho/b} \right\}, \tag{8}$$

в котором ρ и b - параметры формы законов Фреше и Вейбулла, однозначно зависящие от коэффициентов вариации нагрузки $V_{\text{н}}$ и несущей способности $V_{\text{п}}$.

В формулу (8) входит и коэффициент запаса $\bar{K}$, с помощью задания которого в основном и может обеспечиваться необходимый уровень надежности при проектировании.

Интенсивность отказов при постоянной интенсивности нагружений $\omega_{\text{о}}$ определяется формулой:

$$\lambda(t) = \omega_o \left(1 - \frac{\int_0^1 F_1(G) e^{\omega_o t F_1(G)} dG}{\int_0^1 e^{\omega_o t F_1(G)} dG} \right). \tag{9}$$

Из (9) следует, что при постоянной интенсивности нагружений интенсивность отказов $\lambda(t)$ является монотонно убывающей функцией наработки. В простейшем варианте, когда нагрузка и несущая способность имеют распределения Вейбулла или Фреше с одинаковыми коэффициентами вариации, а коэффициент запаса $\bar{K}$=1, получим, что $F_1(G) = G$.

Тогда из (7) следует аналитическое выражение для вероятности безотказной работы в зависимости от наработки:

$$R(t) = \frac{1-e^{-\omega_o t}}{\omega_o t}. \tag{10}$$

Перейдя к безразмерной переменной $\tau = \omega_o t$, можно оценить среднюю наработку до внезапного отказа

$$T = \int_0^{\infty} R(t)dt = \frac{1}{\omega_o} \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau. \tag{11}$$

Использование табличного [4] интеграла

$$\int_0^x \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau = E_1(x) + \ln|x| + C_o,$$

где $E_1(x)$ - интегральная показательная функция; $C_o = 0,57721...$ - постоянная Эйлера; позволяет сделать вывод о том, что интеграл в (11) расходящийся и, следовательно, в рамках рассматриваемой модели не существует конечной величины у средней наработки до отказа. Такой результат получается при $\bar{K}=1$, но учитывая, что с увеличением коэффициента запаса увеличивается и $R(t)$, логично ожидать, что и при $\bar{K}>1$ величина $T\to\infty$. Поэтому при стационарном пуассоновском потоке нагружений и случайном неограниченном сверху рассеивании несущей способности некоторая часть нагружаемых элементов будет оставаться работоспособной при любом увеличении наработки.

Получить аналитическое выражение для вероятности безотказной работы, исходя из (6), можно также в случае подобных величин нагрузки и несущей способности, если они имеют распределение Фреше. Тогда, в соответствии с (6) имеем

$$R(t)=e^{-\bar{m}(t)}\int_0^1 e^{\bar{m}(t)G^{1/\bar{K}^{\rho}}}dG. \tag{12}$$

Делая в (12) замену переменной $x=G^{1/\bar{K}^{\rho}}$, получим выражение, удобное для интегрирования

$$R(t)=e^{-\bar{m}(t))}\bar{K}^{\rho}\int_0^1 e^{\bar{m}(t)x}x^{\bar{K}^{\rho}-1}dx. \tag{13}$$

Интеграл в (13) является табличным [5] и при целых значениях $\bar{K}^{\rho}$ вычисляется в замкнутом виде. В результате получается выражение для вероятности безотказной работы в виде конечной суммы:

$$R(t)=\left(n+1\right)\left[\frac{1}{\bar{m}(t)}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\frac{n\left(n-1\right)...\left(n-i+1\right)}{\left[\bar{m}(t)\right]^{i+1}}+(-1)^{n+1}\frac{n!e^{-m(t)}}{\left[\bar{m}(t)\right]^{n+1}}\right], \tag{14}$$

где $n=\bar{K}^{\rho}-1$.

Формулу (14) удобно использовать только при достаточно малых целых значениях $\bar{K}^{\rho}$. Поэтому в общем случае целесообразно применять выражение вида (12), с использованием численного интегрирования. После интегрирования при $\bar{K}=1$ из (9) может быть получено выражение для интенсивности отказов в явном виде:

$$\lambda\left(t\right)=\frac{e^{\omega_o t}-\omega_o t-1}{t\left(e^{\omega_o t}-1\right)}. \tag{15}$$

Можно показать, что в этом частном случае $\lim\limits_{t\to 0}\lambda(t)=\dfrac{\omega_o}{2}$, а далее с увеличением наработки функция интенсивности отказов монотонно убывает, стремясь к нулю. В общем случае из (9) следует, что начальное (наибольшее) значение интенсивности отказов при $t=0$ определяется формулой:

$$\lambda\left(0\right)=\omega_o\left(1-\int_0^1 F_1(G)\,dG\right)=\omega_o\left(1-R_1\right). \tag{16}$$

Следовательно, по сравнению с интенсивностью потока экстремальных нагружений ω_o начальное значение интенсивности отказов уменьшается пропорционально величине вероятности отказа при первом нагружении.

На рис. 1 показаны графики вероятности безотказной работы в зависимости от безразмерной наработки $\tau = \omega_o t$. Кривые построены с помощью выражения (7) при $F_1(G) = 1 - (1-G)^{\bar{K}^b}$, что соответствует распределению Вейбулла для нагрузки и несущей способности. При этом $b = 12{,}15$ (коэффициент вариации нагрузки и несущей способности $V = 0{,}1$).

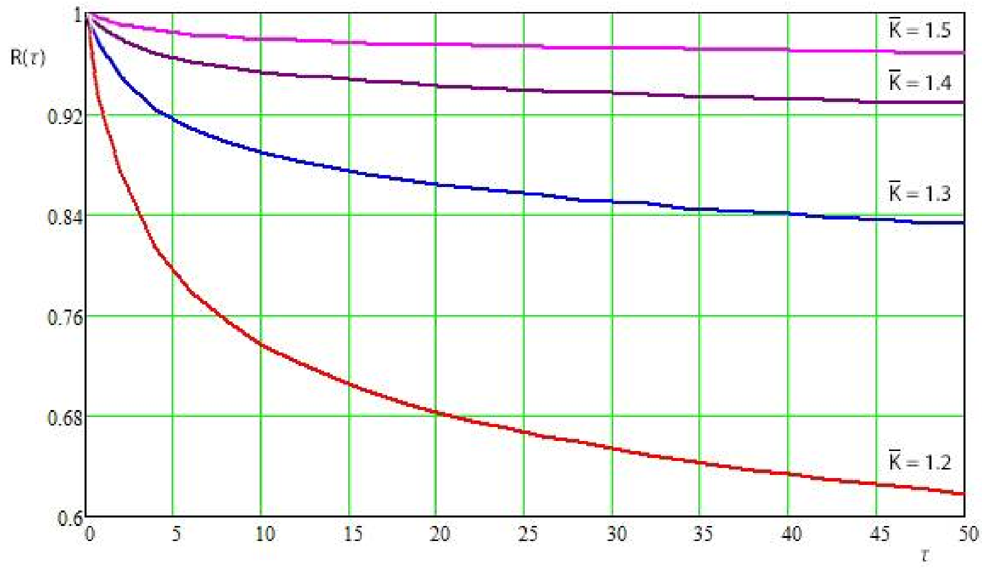

Рис. 1. Графики кривых изменения вероятности безотказной работы в зависимости от наработки и коэффициента запаса

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий характер поведения интенсивности отказов в зависимости от наработки при стационарном пуассоновском потоке нагружений. Пусть средний период между нагружениями $T_o = 100$ ед. наработки и, следовательно, интенсивность потока нагружений $\omega_o = 0{,}01$ (на рис. 2 показана штриховой линией). Если случайная нагрузка имеет распределение Вейбулла с коэффициентом вариации $V_н = 0{,}1$ и параметром формы $b_н = 12{,}15$, то при детерминированной постоянной несущей способности и коэффициенте запаса $K = 1$ интенсивность отказов определяется следующим образом:

$$\lambda = 0{,}01 \cdot \exp\left\{ -\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{12{,}15}\right)\right]^{12{,}15} \right\} = 0{,}00549.$$

Это постоянное значение интенсивности отказов показано на рис. 2 горизонтальной прямой 1. Ниже приведен график интенсивности отказов в случае, когда несущая способность является фиксированной во времени случайной величиной, так же, как и нагрузка распределенной по закону Вейбулла с параметром $b_п = b_н = 12{,}15$, а коэффициент запаса $\bar{K} = 1$. График (кривая 2) построен по формуле (15) и имеет убывающий характер в зависимости от безразмерной наработки $\omega_o t$. Если коэффициент запаса $\bar{K} > 1$, то в рассматриваемом случае $F_1(G) = 1 - (1-G)^{\bar{K}^b}$ и расчет интенсивности отказов ведется по общей формуле (9) с использованием численного интегрирования. Таким способом на рис. 2 построены: кривая 3 (при $\bar{K} = 1{,}1$) и кривая 4 (при $\bar{K} = 1{,}2$). Они имеют монотонно убывающий характер, а также показывают влияние увеличения коэффициента запаса на снижение интенсивности отказов.

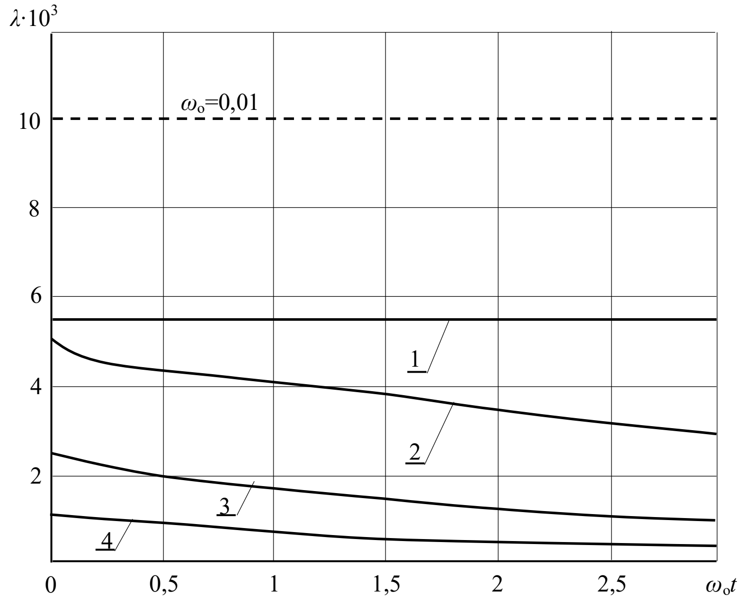

Рис. 2. Графики функции интенсивности внезапных отказов при стационарном пуассоновском потоке нагружений

В частности, начальное (наибольшее) значение интенсивности в рассматриваемом случае с учетом (16) может быть определено по формуле:

$$\lambda(0) = \frac{\omega_o}{\bar{K}^b + 1}. \tag{17}$$

Это выражение позволяет при проектировании назначать величину коэффициента запаса, исходя из требований к уровню безотказности элемента в начальный период эксплуатации. Убывание функции интенсивности отказов $\lambda(t)$ указывает на то, что в отличие от варианта, когда нет случайного рассеивания несущей способности у элементов, при наличии такого рассеивания и стационарном пуассоновском потоке нагружений поток отказов у совокупности элементов отличается от пуассоновского. При этом и распределение случайной наработки между отказами отлично от экспоненциального.

Убывающий характер интенсивности отказов в зависимости от срока эксплуатации при хрупком разрушении стальных конструкций подтверждается статистическими данными, приведенными в [6]. Следствием монотонного убывания интенсивности внезапных отказов будет особенность в изменении соответствующей условной вероятности безотказной работы. Условная вероятность безотказной работы $R\left(t/t_o \right)$ зависит от двух аргументов: t_o - отработанного безотказно предварительного периода и t - последующей наработки. Выражение для определения условной вероятности безотказной работы имеет вид

$$R\left(t/t_o \right) = \frac{R(t_o + t)}{R(t_o)}. \tag{18}$$

Характерная для случая монотонно убывающей интенсивности отказов закономерность поведения функции $R\left(t/t_o \right)$ состоит в том, что при одном и том же значении последующей наработки t с увеличением предварительного периода to условная вероятность безотказной работы возрастает. Это иллюстрирует рис. 3, где при том, что

$0 < t_{o_1} < t_{o_2}$ значения условной вероятности увеличиваются: $R\left(t/0\right) < R\left(t/t_{o_1}\right) < R\left(t/t_{o_2}\right)$.

Следовательно, при проектировании базовой характеристикой, определяющей уровень надежности по внезапным отказам является функция безусловной вероятности безотказной работы $R(t) = R\left(t/0\right)$, которая в процессе эксплуатации у остающихся работоспособными элементов не должна ухудшаться.

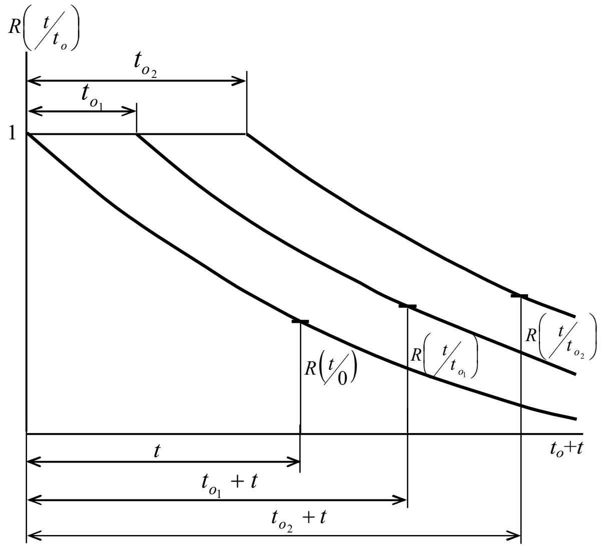

Рис. 3. Вид графиков изменения условной вероятности безотказной работы с увеличением отработанного периода

Выводы

Разработаны модели прогнозирования показателей надежности элементов при внезапных механических отказах, обусловленных случайным потоком экстремальных механических воздействий. Применение моделей позволяет решать инженерные задачи прогнозирования механической надежности элементов машин в условиях случайного рассеивания несущей способности. Выявлены общие закономерности, характерные для интенсивности внезапных механических отказов и условной вероятности безотказной работы при стационарном пуассоновском потоке экстремальных нагружений.

Литература

1. Коненков Ю.К., Ушаков И.А. Вопросы надежности радиоэлектронной аппаратуры при механических нагрузках: М., Сов. радио, - 1975. - 144 с.
2. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем. М.: Мир, 1980. – 604 с.
3. Гринченко А.С. Анализ прочностной надежности элементов и систем на основе метода единичных распределений/ Проблеми надійності машин та засобів механізації сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ ім. Петра Василенка. - Харків, 2010. - Вип. 100. - С. 109-118.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами/ Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. – М.: Наука, 1979.- 832 с.
5. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции./ А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. - М.: Наука, 1981. - 800 с.
6. Сильвестров А.В., Шагимординов Р.М. Хрупкое разрушение стальных конструкций и пути его предотвращения// Пробл. прочности.- 1972.- №5.- С.88-94.27.

Summary

Grinchenko A.S., Alferov A.I. Prognostication of reliability of elements of machines at accidental one puassonovskom stream of the extreme loading

The models of prognostication of reliability at the sudden mechanical refusals are got, built for the case of puassonovskogo stream of the extreme loading. Are exposed to conformity to the law, inherent to intensity of sudden mechanical refusals.
Keywords: *extreme loading, sudden failure, failure rate, Poisson flow, reliability prediction.*

References

1. Konenkov Yu.K., Ushakov I.A. Voprosyi nadezhnosti radioelektronnoy ap-paraturyi pri mehanicheskih nagruzkah: M., Sov. radio, - 1975. - 144 s.
2. Kapur K., Lamberson L. Nadezhnost i proektirovanie sistem. M.: Mir, 1980. - 604 s.
3. Grinchenko A.S. Analiz prochnostnoy nadezhnosti elementov i sistem na osnove metoda edinichnyih raspredeleniy/ Problemi nadIynostI mashin ta zasobIv mehanIzatsIYi sIlskogospodarskogo virobnitstva: VIsnik HNTUSG Im. Petra Vasi-lenka. - HarkIv, 2010. - Vip. 100. - S. 109-118.
4. Spravochnik po spetsialnyim funktsiyam s formulami, grafikami i tabli-tsami/ Pod red. M.Abramovitsa i I.Stigan. – M.: Nauka, 1979.- 832 s.
5. Prudnikov A.P. Integralyi i ryadyi. Elementarnyie funktsii./ A.P. Prud-nikov, Yu.A. Bryichkov, O.I. Marichev. - M.: Nauka, 1981. - 800 s.
6. Silvestrov A.V., Shagimordinov R.M. Hrupkoe razrushenie stalnyih konstruktsiy i puti ego predotvrascheniya// Probl. prochnosti.- 1972.- #5.- S.88-94.27.