Ольшанський В.П.,
Бурлака В.В.,
Сліпченко М.В.
Харківський національний
технічний університет
сільського господарства
імені П.Василенка,
м. Харків, Україна,
E-mail: teoriyaTMM@gmail.com.

КОЛИВАННЯ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ З СУХИМ ТЕРТЯМ ПРИ МЕХАНІЧНОМУ УДАРІ

УДК 534.1:539.3

Описано згасаючі коливання пружної системи з сухим тертям, спричинені механічним ударом по ньому твердим тілом. Використана технічна теорія удару, за якою він вважається миттєвим. Розглянуто два варіанти одноактного удару: неідеально пружний горизонтальний і абсолютно непружний вертикальний, коли додатково враховується також дія миттєво прикладеної ваги тіла, що вдаряє. Методом припасовування розв'язків побудовано компактні аналітичні вирази для обчислення амплітуд переміщень і максимумів пружних відновлюючих сил в осциляторі. Виведено також формули для обчислення часу, коли досягаються екстремуми переміщення і пружної сили після удару. Показано, що із одержаних теоретичних результатів, як окремий випадок, випливає формула Кокса, відома в технічній теорії удару для ідеально пружних систем. Наведено приклади розрахунків, де показано обмежену кількість розмахів коливальної дисипативної системи після удару. Встановлено узгодженість результатів розрахунку за виведеними формулами з результатами числового інтегрування диференціального рівняння руху на комп'ютері.

***Ключові слова:** осцилятор, сухе кулонове тертя, механічний удар, переміщення, пружні сили, їх екстремуми.*

Актуальність. Вільні коливання широко розглядають в задачах на коливання. В реальних системах, як правило, присутні сили опору, які призводять до згасання коливань. Отримання компактних розрахункових формул для коливальних систем з сухим тертям є важливо задачею для розрахунку працездатності реальних конструкцій та деталей машин.

Аналіз останніх публікацій. В динаміці осциляторів з сухим тертям найбільш вивчені вільні коливання, які висвітлені майже в кожному курсі теоретичної механіки [1, 2]. Значно менше уваги приділено в науковій літературі динаміці таких осциляторів при дії ударних навантажень, хоча деякі задачі в цьому напрямі розглянуто в [3]. Тому доцільно дослідити вплив сухого тертя на після ударні коливання та вивести відповідні формули для розрахунку їх основних параметрів.

Мета статті. Метою статті є математичне моделювання руху осцилятора з кулоновим сухим тертям після удару по ньому твердим тілом.

Для досягнення цієї мети використовуємо технічну теорію удару, за якою не враховується його тривалість у часі, та метод припасовування розв'язків диференціальних рівнянь. При цьому задіяно також відомі результати з теорії вільних коливань дисипативних систем з сухим тертям.

Викладення основного матеріалу.

1. Зупинимось спочатку на неідеально пружному горизонтальному ударі. Переміщення коливальної системи $x(t)$ в напрямі горизонтальної вісі Ox описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx + F\,\mathrm{sign}(\dot{x}) = 0, \tag{1}$$

у якому m - маса осцилятора; c - коефіцієнт жорсткості його пружини; F - сила сухого тертя; крапка над x означає похідну за часом t.

Припускаємо, що до удару осцилятор знаходився в стані спокою, а в момент $t=0$, внаслідок удару, миттєво отримав швидкість υ_0. Тому рівняння (1) доповнимо початковими умовами:

$$x(0)=0;\quad \dot{x}(0)=\upsilon_0. \tag{2}$$

Для обчислення υ_0 використовуємо відому формулу [4]:

$$\upsilon_0=\frac{m_0V_0(1+K)}{M},$$

де $M=m+m_0$; m_0 - маса тіла, яке вдаряє зі швидкістю V_0 по осцилятору; K - коефіцієнт відновлення.

Розвязок задачі (1), (2) подаємо у вигляді:

$$x(t)=\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin(\omega t)-\frac{F}{c}\big(1-\cos(\omega t)\big), \tag{3}$$

позначивши через $\omega=\sqrt{c/m}$.

Подальшим перетворенням розв'язку (3) отримуємо:

$$x(t)=-\frac{F}{c}+A\sin(\omega t+\varphi). \tag{4}$$

Тут $A=\sqrt{\left(\frac{\upsilon_0}{\omega}\right)^2+\left(\frac{F}{c}\right)^2}$; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{F\omega}{c\upsilon_0}$.

Із (4) випливає, що найбільше переміщення системи становить:

$$\max x(t)=x(t_0)=a_0=\sqrt{\left(\frac{\upsilon_0}{\omega}\right)^2+\left(\frac{F}{c}\right)^2}-\frac{F}{c}$$

і досягається воно при:

$$t=t_0=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).$$

В цей момент часу максимальна і пружна (відновлююча) сила $f(t)$, причому

$$\max f(t)=f(t_0)=ca_0.$$

При малій швидкості удару або малій масі m_0, відхилившись на a_0 від положення $x=0$, осциллятор може повністю зупинитисьв області застою. Щоб відбувався його подальший рух при $t>t_0$, повинна виконуватись умова:

$$ca_0>F \text{ або } \frac{m_0V_0(1+K)}{M}>\sqrt{3}\,\frac{\omega F}{c}. \tag{5}$$

У цьому випадку, у відповідності з теорією вільних коливань [1, 2], розрахунок подальших амплітуд a_n, $n=1,2,\dots$, зводиться до рекурентних співвідношень:

$$a_1=a_0-\frac{2F}{c};\ a_2=a_1-\frac{2F}{c},\ \dots,\ a_n=a_{n-1}-\frac{2F}{c}=a_0-\frac{2nF}{c}.$$

Осцилятор перейде в стан спокою в області застою, якщо:

$$ca_n<F.$$

Час досягнення амплітуди a_n легко знайти по формулі:

$$t_n = t_0 + \frac{n\pi}{\omega}, \ n = 1, 2, ...$$

Отже характеристики руху a_n і t_n є членами арифметичних прогресій.

Розглянемо приклад. Проведемо розрахунок коливань осцилятора, у якого $m = 5$ кг; $c = 1125$ Н/м; $F = 14{,}715$ Н. Удар здійснюється тілом масою $m_0 = 1$ кг зі швидкістю $V_0 = 6$ м/с при коефіцієнті відновлення $K = 0{,}5$. Для цих вихідних данних: $\upsilon_0 = 1{,}5$ м/с; $\omega = 15\ c^{-1}$ і виконується нерівність (5). Тому осцилятор виходить з області застою внаслідок удару. Результати обчислень a_n і t_n наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Значення a_n і t_n при горизонтальному ударі

n	0	1	2	3
$100a_n$, м	8,777	6,161	3,545	0,929
$10t_n$, с	0,961	3,055	5,149	7,244

Результати числового комп'ютерного інтегрування рівняння (1) при вказаних вище числових данних і початкових умовах (2) графічно подані на рис. 1.

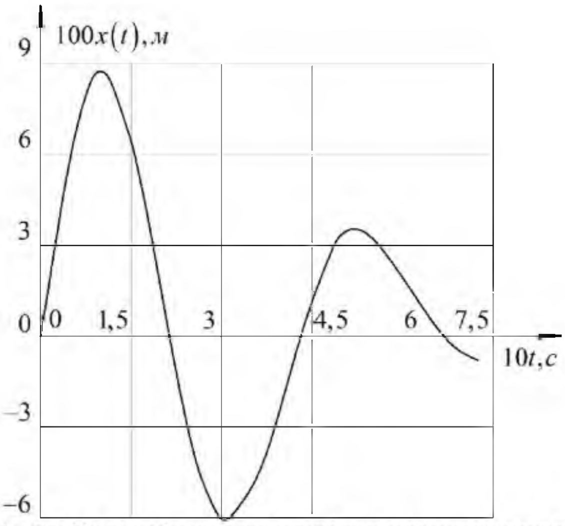

Рис. 1 – Графік переміщень осцилятора при горизонтальному ударі

Як бачимо, до повної зупинки осцилятор виконує обмежену кількість розмахів. Спостерігається гарна відповідність a_n і t_n в табл. 1 і рис. 1, що підтверджує вірогідність аналітичних розв'язків.

2. Вертикальний абсолютно непружний удар. Спрямуємо вісь ox вертикально вниз у напрямі удару по осцилятору тіла масою m_0 зі швидкістю V_0. Тут, на відміну від попередньої задачі, будемо додатково враховувати дію миттєво прикладеної ваги тіла, що вдаряє, яка дорівнює $m_0 g$ де g - прискорення вільного падіння.

Зберігаючи попередні позначення, вертикальні переміщення осцилятора $x(t)$ описуємо диференціальним рівнянням:

$$M\ddot{x} + cx + F\,\mathrm{sign}(\dot{x}) = m_0 g. \tag{6}$$

Його доповнюємо початковими умовами:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = \upsilon_0 = m_0 V_0 / M.$$

Розвязок цієї задачі при $t \in [0; t_0]$ має вигляд:

$$x(t)=\frac{\upsilon_0}{p}\sin(pt)+\frac{m_0g-F}{c}\bigl(1-\cos(pt)\bigr), \tag{7}$$

де $p=\sqrt{c/M}$; $t_0=\frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)$; $\psi=\operatorname{arctg}\frac{p(m_0g-F)}{c\upsilon_0}$.

Подальшим перетворенням розв'язок зводимо до суми:

$$x(t)=\frac{m_0g-F}{c}+B\sin(pt-\psi),$$

в якій $B=\sqrt{\left(\frac{\upsilon_0}{p}\right)^2+\left(\frac{m_0g-F}{c}\right)^2}$.

Найбільше переміщення системи вниз досягається при $t=t_0$ і становить:

$$\max x(t)=x(t_0)=a_0=\sqrt{\left(\frac{\upsilon_0}{p}\right)^2+\left(\frac{m_0g-F}{c}\right)^2}+\frac{m_0g-F}{c}. \tag{8}$$

Йому відповідає найбільше значення пружної відновлюючої сили:

$$\max f(t)=f(t_0)=ca_0.$$

Зазначимо, що коли в (8) покласти $F=0$ і позначити через $x_c=m_0g/c$, то вона набуде вигляд:

$$a_0=x_c\left(1+\sqrt{1+\frac{V_0^2}{g\left(1+\frac{m}{m_0}\right)x_c}}\right).$$

Це формула Кокса, відома в технічній теорії удару [5, 6]. Отже , (8) узагальнює відомі теоретичні результати і дозволяє розрахувати коефіцієнт динамічності системи: $K_д=a_0/x_c$.

Подальший рух осцилятора при $t>t_0$ можливий за умови, що:

$$a_0>\frac{m_0g+F}{c} \text{ або } \upsilon_0>\frac{p}{c}\sqrt{3F^2+m_0g(2F-m_0g)}.$$

У цьому випадку, згідно з теорією вільних коливань, амплітуди a_n задовольняють співвідношенню:

$$a_n=a_{n-1}-2\frac{F-(-1)^n m_0g}{c},\ n=1,2,..., \tag{9}$$

а час їх досягнення змінюється за законом арифметичної прогресії:

$$t_n=t_0+\frac{n\pi}{p},\ n=1,2,... \tag{10}$$

Для обчислення t_0 і a_0 слід використовувати (7) і (8).

Осцилятор припинить рух, якщо:

$$a_n<\frac{F+(-1)^n m_0g}{c}.$$

Використовуючи одержані формули, досить просто обчислити найбільше переміщення і зусилля в осциляторі, а також амплітуди інших розмахів до повної зупинки осцилятора.

Розглянемо приклад. Розрахунки проводимо при $m = 3$ кг; $m_0 = 2$ кг; $c = 3125$ Н/м; $F = 30$ Н; $V_0 = 5$ м/с. Цим вихідним даним відповідає: $p = 25\ c^{-1}$; $\upsilon_0 = 2$ м/с; $m_0 g = 19,62$ Н.

Обчислені по (9) і (10) значення a_n і t_n записані в табл. 2.

Таблиця 2

Значення a_n і t_n при вертикальному ударі

n	0	1	2	3
$100a_n$, м	7,675	4,499	3,835	0,659
$10t_n$, с	0,612	1,868	3,125	4,382

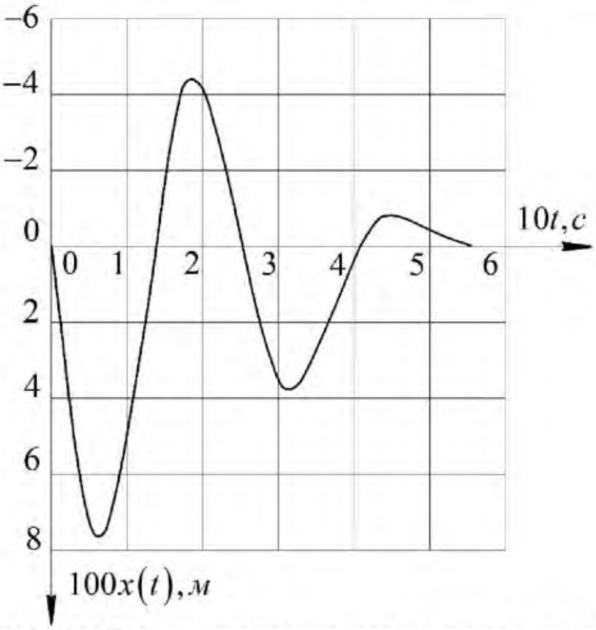

Рис. 2 – Графік коливань осцилятора при вертикальному ударі

Для порівняння, на рис. 2 зображено графік переміщень $x(t)$, одержаний числовим інтегруванням рівняння (6) на комп'ютері. Маємо повну відповідність одержаних різними способами результатів в табл. 2 і на рис. 2.

Висновки. Задача післяударних коливань системи з сухим кулоновим тертям має замкнуті аналітичні розв'язки, що узагальнюють відому формулу Кокса. Обчислення амплітудних відхилень осцилятора від вихідного положення $x = 0$ і часу їх досягнення зводиться до використання рекурентних співвідношень. Порівняння одержаних різними способами числових результатів підтвердило вірогідність виведених розрахункових формул.

Література:

1. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики. Т.2: Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин – Москва: Наука, 1985. – 496 с.
2. Кузьо І.В. Теоретична механіка / І.В. Кузьо. і др. – Харків: Фоліо, 2017. – 780 с.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара / Я.Г. Пановко. – Москва: Наука, 1977. – 232 с.
4. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко – Ленинград: Машиностроение, 1976. – 320 с.

5. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – Москва: Машиностроение, 1970. – 734 с.
6. Ольшанский В.П. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В.П. Ольшанский, Л.Н. Тищенко, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міскдрук, 2012. – 320 с.

Summary

Olshanskiy V.P., Burlaka V.V., Slipchenko M.V. Oscillations of an elastic system with dry friction during a mechanical shock

Damped oscillations of an elastic system with dry friction caused by a mechanical impact on it by a solid body are described. The technical theory of shock is used, according to which it is considered instantaneous. Two variants of a one-act shock are considered: imperfectly elastic horizontal and absolutely inelastic vertical, when also the action of the instantly applied weight of the body, which strikes, is additionally taken into account. By the method of joining solutions, compact analytical expressions are constructed for calculating the amplitudes of displacements and the maxima of elastic restoring forces in the oscillator. Formulas are also derived for calculating the time when extremes of displacement and elastic force are reached after impact. It is shown that from the theoretical results obtained, as a special case, Cox's formula, known in the technical impact theory for perfectly elastic systems, follows. Examples of calculations are given where a limited number of swings of the oscillatory dissipative system after impact is shown. The consistency of the computation results for the derived formulas with the results of numerical integration of the differential equation of motion on a computer is established.

Keywords: *oscillator, piecewise linear elastic characteristic, mechanical impact by a solid body, displacements, forces in deformed elements.*

References

1. Butenin N.V. Kurs teoreticheskoy mehaniki. T.2: Dinamika / N.V. Butenin, Ya.L. Lunts, D.R. Merkin – Moskva: Nauka, 1985. – 496 s.
2. Kuz`o I.V. Teoretychna mehanika / I.V. Kuz`o. i dr. – Harkiv: Folio, 2017. – 780 s.
3. Panovko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mehanicheskogo udara / Ya.G. Panovko. – Moskva: Nauka, 1977. – 232 s.
4. Panovko Ya.G. Osnovi prikladnoy teorii kolebaniy i udara / Ya.G. Panovko. – Leningrad: Mashinostroenie, 1970. – 734 s.
5. Filippov A.P. Kolebaniya deformiruemyih sistem / A.P. Filippov. – Moskva: Mashinostroenie, 1970. – 734 s.
6. Olshanskiy V.P. Kolebaniya sterzhnej i plastin pri mehanicheskom udare / V.P. Olshanskiy, L.N. Tischenko, S.V. Olshanskiy. – Harkov: Miskdruk, 2012. – 320 s.