Калінін Є.І.,
Романченко В.М.,
Юр'єва Г.П.
Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, г. Харків, Україна,
E-mail: kalininhntusg@gmail.ru
betso@ukr.net
anna.yirueva@yandex.ua

ФОРМУВАННЯ УМОВИ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕННЯХ ЇЇ ПАРАМЕТРІВ

УДК 629.4.017

Розглядається задача стійкості системи, яка описується рівнянням n -го порядку з випадковими коефіцієнтами. Отримані необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному, які переходять у відсутність шуму в умові Рауса-Гурвіца. Наведені такі достатні умови стійкості моментів більш високих порядків.

Ключові слова: *лінійна система, критерії стійкості, випадкове збурення параметрів, білий шум, лінійна стохастична система.*

Актуальність проблеми

Сільськогосподарський агрегат являє собою складну керовану динамічну систему, яка функціонує в умовах зовнішніх впливів, що постійно змінюються та обумовлюються багаточисельними і різноманітними факторами. Вплив різних факторів, головним чином випадкових, спричиняє нерівномірність завантаженості агрегатів та їх двигунів, а також зміну енергетичних, економічних та технологічних показників процесів, які виконуються даними системами.

В машино-тракторному агрегаті мінливість зовнішніх факторів при взаємодії робочих органів з оброблюваним середовищем та рушіїв з поверхнею поля, визначає складний характер руху окремих точок системи. Переміщення точок робочих органів агрегату характеризують в значній мірі якість виконання ряду операцій (оранки, культивації, сівби і т.п.). В свою чергу, взаємодія агрегату з оброблюваним середовищем визначає і енергетичні витрати на виконання відповідних польових операцій.

Через випадковий характер зовнішнього впливу технологічні та енергетичні показники роботи агрегатів та їх комплексів є також випадковими величинами. Для практичного врахування випадкових факторів, які мають місце при функціонуванні сільськогосподарського агрегату, необхідно встановити закономірності зміни цих факторів і надати їм якісну та кількісну оцінку, тобто визначити їх статистичні характеристики.

Аналіз останніх публікацій за даною проблемою

У зв'язку з аналізом статистичних характеристик виникає необхідність розробки розрахункової схеми агрегату або комплексу машин, тобто їх динамічної моделі.

В загальній теорії систем керування [5, 6] розглядаються два методи описання функціонування динамічної системи. Перший метод широко використовується в теорії автоматичного керування та статистичній динаміці систем керування, і базується на характеристиках «вхід-вихід», коли динамічна система задається координатами на її вході та виході [7].

Другий метод, найбільш повний, пов'язаний з описанням поведінки динамічної системи в просторі станів (фазовому просторі). Цей метод є досить результативним для розв'язання задач оптимального керування [5]. При цьому, сукупність фазових координат визначає простір станів, а опис роботи динамічної системи зводиться до складання рівнянь руху в просторі стану, тобто рівнянь, що пов'язують координати з керуючими параметрами.

В загальному випадку [1-4] такий метод дозволяє отримати систему лінійних диференційних рівнянь порядку n з постійними коефіцієнтами. Такі рівняння є базовими при розв'язанні задач динаміки в загальному випадку, однак їх використання в теорії стійкості призводить до суттєвого збільшення розрахунків, особливо в стохастичному вигляді.

Результати дослідження

Припустимо, що деяка детермінована система описується лінійними диференційними рівняннями порядку n з постійними коефіцієнтами:

$$y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y = 0 . \tag{1}$$

При впливі на таку систему випадкових сил типу «білого шуму» рівняння (1) перейде в стохастичне диференційне рівняння виду:

$$y^{(n)} + [\alpha_1 + \dot{\zeta}_1(t)]y^{(n-1)} + \ldots + [\alpha_n + \dot{\zeta}_n(t)]y = 0 . \tag{2}$$

Передбачається, що гаусові «білі шуми» $\dot{\chi}_1(t)$, … , $\dot{\chi}_n(t)$ мають нульове математичне очікування, але можуть, в загальному випадку, бути корельованими, тому:

$$M\dot{\zeta}_i(t)\dot{\zeta}_j(s) = 2\alpha_{ij}\delta(t-s) . \tag{3}$$

Як відомо, від шумів $\dot{\zeta}_1(t)$, … , $\dot{\zeta}_n(t)$ можна перейти до незалежних «білим шумів» $\dot{\chi}_1(t)$, … , $\dot{\chi}_n(t)$, з нульовим математичним очікуванням і кореляційною матрицею $2\delta_{ij}(t-s)$ за допомогою формул виду:

$$\dot{\zeta}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\dot{\chi}_j(t) , \tag{4}$$

де матриця $\|b_{ij}\|$ така, що:

$$\|b_{ij}\| \cdot \|b_{ji}\| = \|\alpha_{ij}\| . \tag{5}$$

Рівняння (2) надалі розуміється як система стохастичних диференційних рівнянь, яку, враховуючи (4) і вводячи позначення

$$y = X_1 ,\ y' = X_2 ,\ \ldots ,\ y^{n-1} = X_n , \tag{6}$$

можна записати у вигляді:

$$\begin{gathered} dX_1 = X_2 dt,\ dX_2 = X_3 dt, \ldots,\ dX_{n-1} = X_n dt, \\ dX_n = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{n-i+1} dt - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} X_{n-i+1} d\chi_j(t). \end{gathered} \tag{7}$$

Як відомо, існує єдиний строго марковский процес з безперервними траєкторіями $X^x(t) = (X_1^x(t), \ldots, X_n^x(t))$, що задовольняє системі (7) при початкових умовах $X^x(0) = x$.

З процесом $X^x(t)$ тісно пов'язаний диференційний оператор другого порядку:

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{n-i+1}\frac{\partial}{\partial x_n} + \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_{n-i+1} x_{n-j+1}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} , \tag{8}$$

який при дослідженні стійкості марковских процесів відіграє ту саму роль, що й оператор Ляпунова в стійкості детермінованих систем [8, 9].

Використовуючи роботи [8, 10] будемо казати, що система (7) асимптотично

p-стійка ($p > 0$), якщо $\lim M\left|X^x(t)\right|^p = 0$ при $t \to \infty$ й, крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $M\left|X^x(t)\right| < \varepsilon$, якщо $|x| < \delta$ (через $|x|$ позначена евклідова норма вектору x). Назвемо систему (7) асимптотично стійкою в середньому квадратичному, якщо вона стійка при $p = 2$.

Метод отримання необхідних і достатніх умов стійкості в середньому квадратичному довільної лінійної системи з «білими шумами» вказаний в роботі [10], де розглядається відмінна від прийнятої в даній роботі модель лінійної стохастичної системи. Однак, отримані таким методом умови досить великі: для їх перевірки необхідно розрахувати n^2 визначників, старший з яких має порядок n^2.

В роботі [5] доведено, що для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному стаціонарної лінійної стохастичної системи необхідно і достатньо, щоб для будь-якої визначено-додатної квадратичної форми $W(x)$ знайшлась інша визначено-додатна квадратична форма $V(x)$, для якої $LV(x) = -W(x)$. Ця теорема дозволяє отримати алгебраїчні критерії для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному такої системи. Однак, ці критерії призводять до значного збільшення розрахунків навіть в детермінованому випадку.

Як показано в роботі [11], для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному системи (7) необхідно, щоб система «без випадковостей»

$$dX_1 = X_2dt,\, dX_2 = X_3dt, \dots, dX_{n-1} = X_ndt,\, dX_n = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{n-i+1}\,. \tag{9}$$

була асимптотично стійкою, тобто щоб виконувались умови Рауса-Гурвіца:

$$\Delta_1 = \alpha_1 > 0,\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} > 0,\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & \cdots & \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} > 0\,. \tag{10}$$

Відомо, що при виконанні цих умов існує визначено-додатна квадратична форма $V(x)$, для якої повна похідна, враховуючи (9), являє собою наперед задану від'ємно-визначену квадратичну форму:

$$L_0V = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \frac{\partial V}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{n-i+1} \frac{\partial V}{\partial x_n}\,. \tag{11}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли квадратична форма виду

$$\alpha(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_{n-i+1} x_{n-j+1}\,,\; (\alpha_{ij} = \alpha_{ji}) \tag{12}$$

визначено-додатна. Тоді справедливе припущення, що для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному системи (7) необхідно і достатньо, щоб існувала визначено-додатна квадратична форма виду:

$$V(x) = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j\,, \tag{13}$$

яка задовольняє умовам виду:

$$L_0 V(x) = -\alpha(x), \; d_{nn} < \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Для отримання умов достатньо виразити коефіцієнт d_{nn} в формі $V(x)$, яка визначається з рівняння (14), через параметри α_i та α_{ij} системи (7).

З цією метою позначимо через $X^{\circ}_{1j}(t),...,X^{\circ}_{nj}(t)$ ($j = 1,2,...,n$) фундаментальну систему розв'язань детермінованих рівнянь (9), яка визначається початковими умовами $X^{\circ}_{sj}(0) = \delta_{sj}$. Тоді будь-який розв'язок $X^{\circ x}_1(t),..., X^{\circ x}_n(t)$ цих рівнянь з початковими умовами $X^{\circ x}_i(0) = x_i$ ($i = 1,2,...,n$) запишеться в наступному вигляді:

$$X^{\circ x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j X^{\circ}_{ij}(t). \tag{15}$$

Як відомо, функцію $V(x)$, яка задовольняє співвідношенню (14), можна представити у вигляді:

$$V(x) = \int_0^{\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} X^{\circ x}_{n-i+1}(u) X^{\circ x}_{n-j+1}(u)\,du. \tag{16}$$

Останнє рівняння дозволяє виразити коефіцієнти d_{ij} форми $V(x)$ і, в окремому випадку, коефіцієнт d_{nn} через фундаментальну систему розв'язань $X^{\circ}_{ij}(t)$, а потім і через коефіцієнти α_i і α_{ij}. Дійсно, як показано в роботі [9]:

$$d_{nn} = \frac{1}{2\Delta_n} \sum_{r=0}^{n-1} q^{(r)}_{nn} \Delta_{1,r+1}, \tag{17}$$

де $\Delta_{1,r+1}$ – алгебраїчне доповнення елементу першої строки і $r+1$ стовпця останнього визначника Гурвіца Δ_n, а числа $q^{(r)}_{nn}$ пов'язані з коефіцієнтами α_{ij} форми $\alpha(x)$ залежністю виду:

$$(-1)^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{n-i+1,n-j+1} D_{ni}(\psi) D_{nj}(-\psi) = \sum_{r=0}^{n-1} q^{(r)}_{nn} \psi^{(n-r-1)}. \tag{18}$$

Тут $D_{ni}(\psi)$ – алгебраїчне доповнення елементу n-ї строки і i-го стовпця визначника системи (7):

$$D(\psi) = \begin{vmatrix} -\psi & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\psi & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_1 - \psi \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Легко бачити, що $D_{ni}(\psi) D_{nj}(-\psi) = (-1)^{i+j-1} \psi^{j-2}$. Тому з залежності (18) отримаємо:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{p+q=2(n-k)} (-1)^{q+1} \alpha_{pq} \right) \psi^{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} q^{(n-k-1)}_{nn} \psi^{2k}, \quad q^{(n-k-1)}_{nn} = \sum_{p+q=2(n-k)} (-1)^{q+1} \alpha_{pq}. \tag{20}$$

З рівнянь (17) і (20) випливає, що в разі, коли $\alpha(x)$ є визначено-додатною квадратичною формою, для стійкості в середньому квадратичному системи (7) необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні умови:

$$\Delta_1 > 0, ..., \Delta_n > 0, \Delta_n > \Delta, \tag{21}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} q_{nn}^{(0)} & q_{nn}^{(1)} & q_{nn}^{(2)} & \cdots & q_{nn}^{(n-1)} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Даний визначник відрізняється від останнього визначника Гурвіца Δ_n лише першою строкою. При цьому числа $q_{nn}^{(r)}$ ($r = 0,1,..,n-1$) виражаються через коефіцієнти α_{ij} матриці кореляції за формулами (20).

Покажемо тепер, що умови (20) – (22) залишаються вірними й без припущення про додатну визначеність квадратичної форми $\alpha(x)$. Для цього разом з системою (7) розглянемо іншу систему виду:

$$\begin{gathered} dX_1 = X_2 dt,\ dX_2 = X_3 dt, \ldots, dX_{n-1} = X_n dt, \\ dX_n = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{n-i+1} dt - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} X_{n-i+1} d\chi_j + \varepsilon X_1 d\zeta_1 + \varepsilon^2 \sum_{i=2}^{n} X_i d\zeta_i. \end{gathered} \tag{23}$$

Тут $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)$ – незалежні між собою й від $\chi_1(t), \ldots, \chi_n(t)$ вінеровські процеси, а ε – достатньо малий параметр.

Легко бачити, що оператор, який відповідає системі (23), має вигляд:

$$L_\varepsilon = L + \left(\varepsilon^2 x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon^4 x_i^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \tag{24}$$

Оскільки квадратична форма

$$\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x) + \varepsilon^2 x_1^2 + \varepsilon^4 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \tag{25}$$

визначено-додатна при будь-якому $\varepsilon > 0$, то для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному системи (23) необхідно й достатньо, щоб виконувались наступні умови:

$$\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0,\ \Delta_n > \Delta_\varepsilon,$$

де

$$\Delta_\varepsilon = \begin{vmatrix} q_{nn}^{(0)} + \varepsilon^4 & q_{nn}^{(1)} - \varepsilon^4 & q_{nn}^{(2)} + \varepsilon^4 & \cdots & (-1)^{n-1}(\alpha_{nn} + \varepsilon^2) \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} = \Delta + (-1)^{n-1} \varepsilon^2 \Delta_{1n} + \varepsilon^4 \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \Delta_{1i}. \tag{26}$$

Оскільки $(-1)^{n-1} \Delta_{1n} > 0$, то з (26) випливає, що при усіх достатньо малих ε отримаємо:

$$\Delta_\varepsilon > \Delta. \tag{27}$$

Припустимо, що система (7) асимптотично стійка в середньому квадратичному. Тоді, виходячи з роботи [11], система (23) буде також стійкою при всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ й значить:

$$\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0,\ \Delta_n > \Delta_\varepsilon. \tag{28}$$

З (27) та (28) отримаємо:

$$\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0,\ \Delta_n > \Delta. \tag{29}$$

В інший бік, нехай нерівності (29) виконані. Тоді з (26) можна зробити висновок, що знайдеться таке достатньо мале ε, для якого виконуються нерівності (28), тобто система (23) асимптотично стійка в середньому квадратичному при цьому ε. Отже, система (7) також асимптотично стійка в середньому квадратичному. Приймемо наступне припущення: для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному системи (7) необхідно й достатньо, щоб виконувались умови (29). Тоді, визначник Δ має вигляд (22), а числа $q_{nn}^{(r)}$ ($r = 0,1,\dots,n-1$), які стоять в першій строчці цього визначника, виражають через коефіцієнти α_{ij} за формулами (20).

Необхідно відмітити, що в умови (29) входять лише ті коефіцієнти α_{ij} кореляційної матриці, для яких сума $i + j$ парна. Зокрема, для систем другого та третього порядків необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному при $n = 2$ мають вигляд:

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1\alpha_2 > \alpha_{11}\alpha_2 + \alpha_{22}, \tag{30}$$

а при $n = 3$:

$$\alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0, \alpha_1\alpha_2 > \alpha_3, (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_3 > \alpha_{11}\alpha_2\alpha_3 + \alpha_{33}\alpha_1 + \alpha_3(\alpha_{22} - 2\alpha_{13}). \tag{31}$$

У випадку, коли до коефіцієнтів α_i рівняння (1) додаються незалежні білі шуми $\dot\zeta_1, \dots, \dot\zeta_n$, тобто $\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$, визначник Δ приймає найбільш простий вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{22} & \alpha_{33} & \cdots & (-1)^{n-1}\alpha_{nn} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix}. \tag{32}$$

Умови (20) – (22) є достатніми для асимптотичної *p*-стійкості системи (7) при $p \le 2$. Тому, розглянемо достатні умови асимптотичної *p*-стійкості при $p > 2$. Припустимо спочатку, що квадратична форма $\alpha(x)$ визначено-додатна.

Для асимптотичної *p*-стійкості при $p = 2$, а отже й при $p > 2$, необхідно, щоб існувала визначено-додатна квадратична форма, що задовольняє співвідношенню (14), виду:

$$V(x) = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j,\ (d_{ij} = d_{ji}), \tag{33}$$

Нехай:

$$V^{\circ}(x) = [V(x)]^{\frac{1}{2}p} . \tag{34}$$

Зрозуміло, що:

$$\begin{aligned} LV^{\circ} &= pV^{\frac{1}{2}p-2}\left\{\frac{VL_0V}{2} + \alpha(x)\left[Vd_{nn} + (p-2)\left(\sum_{j=1}^{n} d_{nj}x_j\right)^2\right]\right\} = \\ &= pV^{\frac{1}{2}p-2}\alpha(x)\left[V\left(d_{nn} - \frac{1}{2}\right) + (p-2)\left(\sum_{j=1}^{n} d_{nj}x_j\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{35}$$

З нерівності для визначено-додатної Из неравенства для определенно-положительной самосполученої матриці виду

$$(D_{x,y}) \le (D_{x,x})(D_{y,y}) , \tag{36}$$

при $y = (0,...,0,1)$ витікає, що:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} d_{nj}x_j\right)^2 \le d_{nn}V(x) . \tag{37}$$

Використовуючи дане співвідношення, з виразу (35) отримаємо:

$$LV^{\circ} \le pV^{\frac{1}{2}p-1}\alpha(x)\left[d_{nn}(p-1) - \frac{1}{2}\right]. \tag{38}$$

Якщо $d_{nn}(p-1) < \frac{1}{2}$, то з залежності (38) витікає, що система (7) асимптотично p-стійка.

Таким чином для асимптотичної стійкості системи (7) при $p > 2$ достатньо, щоб виконувались наступні нерівності (з яких перші n є необхідними):

$$\Delta_1 > 0, ... , \Delta_n > 0 , \ \Delta_n > (p-1)\Delta . \tag{39}$$

При цьому, можна навести приклади, які показують, що умова $\Delta_n > (p-1)\Delta$ не є необхідною.

Неважко також показати, що умови (39) залишаються вірними й без припущення про невиродженість квадратичної форми $\alpha(x)$.

Висновки

В результаті теоретичних досліджень отримані необхідні і достатні умови стійкості в середньому квадратичному системи (2) або (7), що вимагають обчислення всього $n+1$ визначників, старший з яких має порядок n. При цьому виявляється, що перші n визначників ті ж, що і визначники Δ_k ($k = 1,2,...,n$), що входять в критерій Рауса-Гурвіца для рівняння (1). Останній же визначник отримують заміною в Δ_n першого рядка рядком, складеним за певним правилом з коефіцієнтів α_{ij} кореляційної матриці. Якщо всі $\alpha_{ij} = 0$, то критерії (20) – (22) переходить в критерій Рауса-Гурвіца.

Література:

1. Калінін Є.І. Частотно-динамічна математична модель тракторного агрегату з передачею крутного моменту до рушіїв сільськогосподарської машини / Є.І. Калінін //

Вісник ХНТУСГ ім. Петра Василенка. – 2015. – Вип. 156. – С. 327-334.

2. Лебедєв А.Т. Динамічна модель ґрунтообробних машинно-тракторних агрегатів з пасивними робочими органами у складі енергетичного засобу зі здвоєними шинами / А.Т. Лебедєв, Є.І. Калінін // Системи обробки інформації. – 2010. – № 2. – С. 109-115.
3. Шуляк М.Л. Оцінка функціонування сільськогосподарського агрегату за динамічними критеріями / М.Л. Шуляк, А.Т. Лебедєв, М.П. Артьомов, Є.І. Калінін // Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів – 2016. – № 4. – С. 218-226.
4. Калінін Є.І. Моделювання коливань кузову транспортного засобу на гусеничному ході з врахуванням гнучкості кузову / Є.І. Калінін, В.М. Романченко, Г.П. Юр'єва // Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів – 2016. – № 6. – С. 232-238.
5. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 408 с.
6. Катковник В. Я. Многомерные дискретные системы управления / В.Я. Катковник, Р.А. Полуэктов. – М.: Наука, 1966. – 416 с.
7. Беляев Л. С. Решение сложных оптимизационных задач в условиях неопределенности / Л.С. Беляев. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1978. – 126 с.
8. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И.Я. Кац. – Екатеринбург: УрГАПС, 1998. – 221 с.
9. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметром : научное издание / Р. З. Хасьминский. – М.: Наука, 1969. – 366 с.
10. Leibowitz M.A. Statistical behavior of linear systems with randomly varying parameters. J. Math. Phys., 1993. – Vol. 4. – No. 6. – 128-132 p.
11. Caughey T.K., Dienes J.K. The behavior of linear systems with random parametric excitation. J. Math. and Phys., 1992. – Vol. 41. – No. 4. – 301-311 p.
12. Манита А. Д. Марковские процессы в непрерывной модели стохастической синхронизации / А. Д. Манита // Успехи математических наук. – 2006. – Т. 61, № 5. – С. 187-188.
13. Миллер В. М. Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений / В. М. Миллер, Г. Б. Миллер, К. В. Семенихин // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №2. – С. 111-130.
14. Хуторцева М. В. Фильтрация параметров дискретного марковского процесса с двумя состояниями на основе принципа объединения наблюдений / М. В. Хуторцева // Радиотехника. – 2011. – №5. – С. 81-86.

Summary

Kalinin E., Romanchenko V., Yurueva G. Formation conditions of stability of linear system randomly excited of parameters

In the article consider the problem stability of the system, which described by the equation of some order with random factors. The necessary and sufficient conditions for asymptotic stability in the mean square, moving in the absence of noise condition Routh-Hurwitz. These are sufficient conditions of stability points higher orders.

Key words: *linear system, stability criteria, random perturbations, white noise, linear stochastic system.*

References

1. E.I. Kalinin Frequency-dynamic mathematical model of the tractor unit to the transfer of torque to the propulsion of agricultural machinery / E.I. Kalinin // Bulletin KNTUA them. Petro Vasilenko. – 2015. – Vol. 156. – P. 327-334.
2. Lebedev A.T. Dynamic model tillage machine and tractor units with passive working bodies composed of power tool with dual tires / A.T. Lebedev, E.I. Kalinin // Information processing systems. – 2010. – № 2. – P. 109-115.
3. Shuliak M.L. Evaluation of the functioning of the agricultural unit on dynamic criteria / M.L. Shuliak, A.T. Lebedev, N.P. Artiomov, E.I. Kalinin // Technical service the agricultural, forestry and transport systems – 2016. – № 4. – P. 218-226.
4. E.I. Kalinin Simulation vehicle body vibrations, crawler-mounted, taking into account the flexibility of body / E.I. Kalinin, V.N. Romanchenko, G.P. Yurueva // Technical service the agricultural, forestry and transport systems – 2016. – № 6. – P. 232-238.
5. Boltyansky V.G. Mathematical methods of optimal control / V.G. Boltyanskii. – Ed. 2-nd, revised and additional. – Moscow: Nauka, Ch. Ed. Fiz.-mat. Lit., 1969. – 408 p.
6. Katkovnikov V.Y. Multidimensional discrete control systems / V.Y. Katkovnikov, R.A. Poluektov. – Moscow: Nauka, 1966. – 416 p.
7. Belyaev L.S. Solving complex optimization problems under conditions of uncertainty / L.S. Belyaev. – Novosibirsk: Science. Sib. Department, 1978. – 126 p.
8. Kats I.Y. The Lyapunov function method in problems of stability and stabilization of systems of random structure / I.Y. Katz. – Ekaterinburg: Ural State Technical University, 1998. – 221 p.
9. Khasminsky R.Z. Stability of systems of differential equations for random perturbations by their parameter: a scientific publication / R.Z. Khasminskii. – Moscow: Nauka, 1969. – 366 p.
10. Leibowitz M.A. Statistical behavior of linear systems with randomly varying parameters. J. Math. Phys., 1993. – Vol. 4. – No. 6. – 128-132 p.
11. Caughey T.K., Dienes J.K. Behavior of linear systems with random parametric excitation. J. Math. And Phys., 1992. – Vol. 41. – No. 4. – 301-311 p.
12. Manita A.D. Markov processes in the continuous stochastic synchronization model / A.D. Manita // Math. science. – 2006. – Vol. 61. – № 5. – P. 187-188.
13. Miller V.M. Methods for the synthesis of optimal control by a Markov process with a finite set of states in the presence of constraints / V.M. Miller, G.B. Miller, K.V. Semenikhin // Automatic and telemechanic. – 2011. – №2. – P. 111-130.
14. Hutortseva M. V. Filtratsiya parametrov diskretnogo markovskogo protsessa s dvumya sostoyaniyami na osnove printsipa ob'edineniya nablyudeniy / M. V. Hutortseva // Radiotehnika. – 2011. – #5. – S. 81-86.