

Бойко А.І.

Морозовська З.А.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail:zoya140790@mail.ru

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗНОШУВАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ ДІЛЬНИЦІ ОТВОРІВ РЕШІТ

УДК 519.863:621.928.028.2

*У статті приведений математичний опис процесу зміни форми профілю отворів сепаруючого решета. Пропонується величину зношування оцінювати втратою площі тіла, що утворюється між двома суміжними профілями отвору. Виходячи з рівності величин площ зношування за однакові проміжки наробітку, встановлено рівноспівільнений характер переміщення профілей, який виявляє тенденцію до формування отворів природного зношування.*

**Ключові слова:** сепаруюче решето, накопичення зношування, форма отвору, природне зношування.

### Актуальність проблеми

Зношування металевих поверхонь отворів сепаруючого решета в потоці зернової маси обумовлене сумісною дією багатьох факторів: силового впливу від потоку зернової суміші; швидкісного, в наслідок переміщення суміші відносно решета; хімічного (вологість, вплив хімічних складових зруйнованого зерна); абразивного, при контакті поверхонь тертя з твердими частинками домішок.

Кожен з них вносить свій вклад в процес зношування, однак в залежності від зовнішніх умов, процес може протікати при домінуючій ролі якогось із них. Вважається, що насамперед, важливу роль відіграють тиск на поверхні тертя і відносна швидкість переміщення зернового матеріалу. Про це, опосередковано свідчить зміна геометричної форми отворів решета після тривалої їх роботи.

### Мета досліджень

Виявити причини, що обумовлюють нерівномірність зношування кутової форми границь отворів сепаруючих решіт в процесі експлуатації. Обґрунтувати необхідність зміни форми отворів у математичному інтерпретуванні.

### Результати досліджень

Основною вимогою до фізико-математичного моделювання зношування і зміни форми профілю отвору решета є адекватний, з достатньою точністю, опис його переміщення в глибину деталі. В разі встановлення основних закономірностей такого переміщення крім аналізу процесу, відкриються можливості визначення граничних величин зношування і раціональні напрямки в підвищенні довговічності сепаруючих решіт.

Припущеннями прийнятими при моделюванні зношування і зміни форми отворів сепаруючих решіт є наступні:

Лінії профілю зношування з допустимим наближенням можуть бути описані частинами кола.

Зношені площі суміжних ділянок профілів за рівні проміжки наробітку дробарки мають однакові величини.

Деякою існуючою різницею в товщині зношеної елементарної ділянки профілю можна знехтувати.

З урахування прийнятих припущень опис моделі зношування отворів представляється наступним чином. Профілі зношування є частинами кіл, які вписані в кут суміжних робочих поверхонь отвору. В результаті зношування профіль зміщується в глибину матеріалу деталі і через певний вибраний проміжок наробітку займає нове своє положення. Площа, що заключена між двома утвореними профілями, дає можливість кількісної оцінки величини зносу. По величині цих окремих площ у вигляді відповідних скиб можна свідчити про розподіл і величини зношування поверхонь. Новим важливим фактом при попередньому аналізі особливостей зношування отворів є те, що площі зносу, які отримані за рівні проміжки, наробіток є практично однаковими по величині. Очевидно даний результат не є випадковим і підкреслює те, що робота, яка витрачається на зношування (втрату об'єму матеріалу), є на будь-якому етапі експлуатації решіт, величиною постійною. Виходячи з цього пояснюється нерівномірне розташування ліній профілів при аналізі зношування отворів. На початку експлуатації щільність їх розташування менша і поступово нарощується при збільшенні наробітку і зношуванні отворів. Вказана особливість дає можливість розглядати в моделі зношування отворів переміщення профілів зношування як нерівномірний рух центрів кіл, що описують ці профілі.

Таким чином описовою частиною моделі закладені основи формалізації зношування і зміни форми отворів для складання відповідної математичної моделі цього процесу.

Для математичного опису зношування виберемо нерухому систему координат  $XOY$  (рис. 1), зв'язану із самим отвором.

Зношування отвору пропонується розглядати і описати математично, як переміщення кола вписаного в кут отвору. Причому, по мірі переміщення кола розвивається набуваючи більших розмірів із збільшенням радіуса

$$r_2 > r_1$$

Очевидно доцільно вважати граничним кінцевим зношенням сторони отвору досягнення лінією профілю точки  $M$ , коли прохідний діаметр отвору ще не збільшився (показано пунктиром).

Для побудови математичної моделі зміни форми отвору при зношуванні розглянута довільна точка  $T$  на початковому профілі 1-1. Координати цієї точки, як і будь-якої іншої точки профілю в залежності від кута  $\varphi$ , в загальній вибраній системі  $XOY$  можна записати наступним чином:

$$x_1 = x_{O1} - r_1 \cdot \cos \varphi_1;$$

$$y_1 = y_{O1} + r_1 \cdot \sin \varphi_1,$$

де  $x_{O1}$  – координата центру кола радіуса  $r_1$ ;  $r_1$  – радіус кола, що описує початковий після припрацювання профіль зношування;  $\varphi_1$  – кут повороту радіуса кола для профілю 1-1.

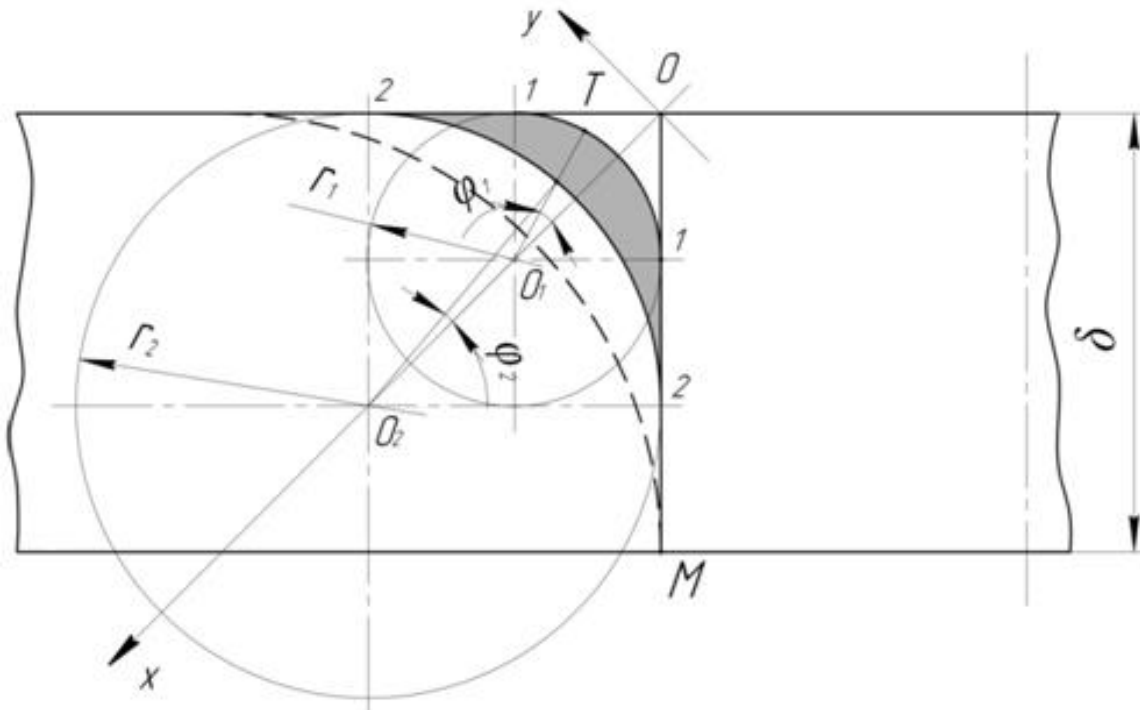


Рисунок 1. Схема зношування і зміни форми отвору сепаруючого решета

Так як, переміщення центру кола відбувається у вздовж осі  $OX$ , то  $y_{O1} = 0$  і система записується спрощено:

$$\begin{cases} x_1 = x_{O1} - r_1 \cdot \cos \varphi_1; \\ y_1 = r_1 \cdot \sin \varphi_1. \end{cases} \quad (1)$$

Відповідно для другого більшого кола, яке утворилося в наслідок зношування отвору, система рівнянь, що визначає положення точок нового профілю представляється наступним чином:

$$\begin{cases} x_2 = x_{O2} - r_2 \cdot \cos \varphi_2; \\ y_2 = r_2 \cdot \sin \varphi_2, \end{cases} \quad (2)$$

де  $x_{O2}$  – координата центру кола радіуса  $r_2$ ;  $r_2$  – радіус кола після деякого зношування профілю отвору;  $\varphi_2$  – кут повороту радіуса кола для профілю 2-2.

Результатом зношування отвору в перерізі, представлено на рис. 1., є втрата площі  $S_i$  тіла отвору, що знаходиться між початковим колом радіуса  $r_1$  і утвореним колом радіусом  $r_2$ . Згідно вибраної системи координат і прийнятої схематичної побудови втрачена площа зношування симетрична відносно осі  $OX$ . Тому при її визначенні розглянути тільки половину цієї площі. Схема для аналізу і розрахунку зношування сторони отвору представлена на рис. 2.

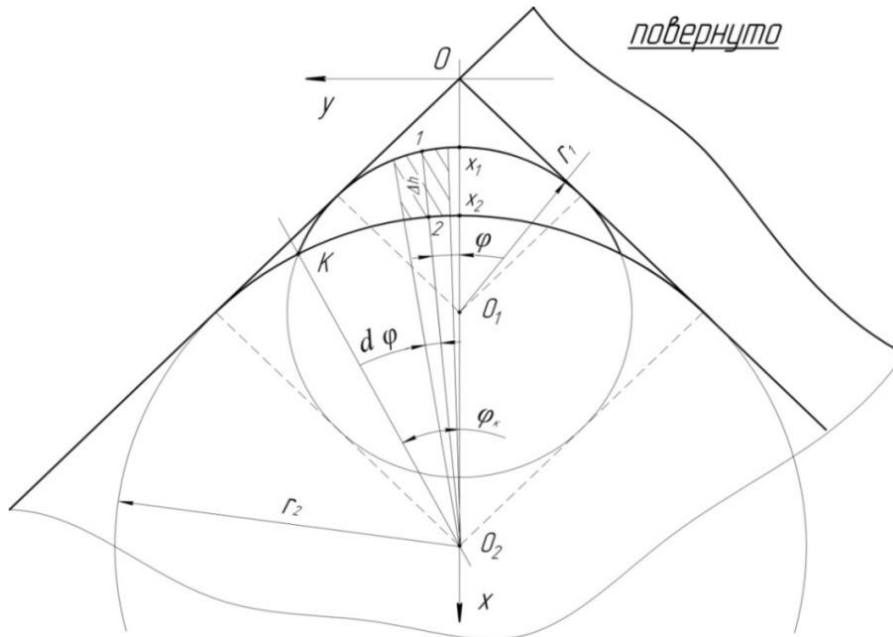


Рисунок 2. Схема до визначення закономірностей динаміки зношування отворів решіт

Елементарна площадка зношування записується у вигляді добутку

$$dS_i = dl \cdot \Delta h, \quad (3)$$

де  $\Delta h$  – товщина зношеного шару між профілями отвору;  $dl$  – елементарна дуга, яка з достатньою точністю може бути визначена як:

$$dl = r_2 \cdot d\varphi \quad (4)$$

Товщина зношеного шару може бути представлена через координати точки профілю. Для аналізу і встановлення її величини виділимо з рис. 2 окрему геометричну побудову, що представлена на рис. 3.

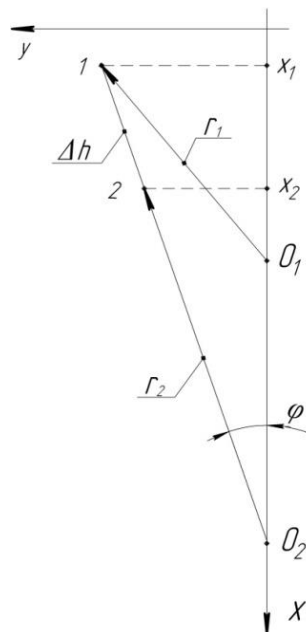


Рисунок 3. Схема для визначення товщини зношеного шару  $\Delta h$

З геометричних співвідношень сторін трикутників  $O_2, l, x_1$  і  $O_1, l, x_1$  видно, що:

$$\begin{aligned}(1-x_1)^2 &= r_1^2 - (x_{O1} - x_1)^2; \\ (1-x_1)^2 &= (r_2 + \Delta h)^2 - (x_{O2} - x_1)^2.\end{aligned}$$

Ліві сторони рівностей однакові тому можна записати:

$$r_1^2 - (x_{O1} - x_1)^2 = (r_2 + \Delta h)^2 - (x_{O2} - x_1)^2. \quad (5)$$

Враховуючи, що:

$$\begin{aligned}x_{O1} &= \sqrt{2}r_1; \\ x_1 &= \sqrt{2}r_1 - r_1 \cdot \cos \varphi; \\ x_{O2} &= \sqrt{2}r_2,\end{aligned}$$

де  $\varphi$  – кут повороту елементарної площадки зношування.

Рівняння (5) після підстановки складових можна записати так:

$$r_1^2 - \left( \sqrt{2}r_1 - (\sqrt{2}r_1 - r_1 \cdot \cos \varphi) \right)^2 = r_2^2 + 2r_2 \cdot \Delta h + \Delta h^2 - \left[ \sqrt{2}r_2 - (\sqrt{2}r_1 - r_1 \cdot \cos \varphi) \right]^2.$$

Розкриваючи дужки маємо:

$$\begin{aligned}r_1^2 - r_1^2 \cdot \cos^2 \varphi &= \\ &= r_2^2 + 2r_2 \cdot \Delta h + \Delta h^2 - \left[ 2r_2^2 + 2\sqrt{2}r_2 \cdot (\sqrt{2}r_1 - r_1 \cdot \cos \varphi) - (\sqrt{2}r_1 - r_1 \cdot \cos \varphi)^2 \right],\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}r_1^2 - r_1^2 \cdot \cos^2 \varphi &= \\ &= r_2^2 + 2r_2 \cdot \Delta h + \Delta h^2 - 2r_2^2 - 2\sqrt{2} \cdot r_2 \cdot \sqrt{2}r_1 + 2\sqrt{2} \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot \cos \varphi - \\ &- \left[ 2r_1^2 - 2\sqrt{2} \cdot r_1 \cdot r_1 \cdot \cos \varphi + r_1^2 \cdot \cos^2 \varphi \right].\end{aligned}$$

Квадратом товщини зношення шару  $\Delta h$  за один крок елементарного переміщення профілю як величиною другого порядку малості можна знехтувати. Тоді рівність після спрощень представляється наступним чином:

$$\begin{aligned}-r_1^2 - \cos \varphi \left[ 2\sqrt{2} \cdot r_2 \cdot r_1 + 2\sqrt{2} \cdot r_1^2 \right] - r_2^2 + 2r_2^2 + \\ + 2\sqrt{2} \cdot r_2 \cdot \sqrt{2} \cdot r_1 + 2r_1^2 = 2r_2 \cdot \Delta h,\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}r_2^2 + 4r_1 \cdot r_2 + r_1^2 - \cos \varphi \cdot (2\sqrt{2} \cdot r_2 \cdot r_1 + 2\sqrt{2} \cdot r_1^2) = 2r_2 \cdot \Delta h, \\ r_2^2 + 4r_1 \cdot r_2 + r_1^2 - 2\sqrt{2} \cos \varphi \cdot (r_2 \cdot r_1 + r_1^2) = 2r_2 \cdot \Delta h.\end{aligned}$$

Звідки:

$$\Delta h = \frac{r_2^2 + 4r_1 \cdot r_2 + r_1^2 - 2\sqrt{2} \cos \varphi \cdot (r_2 \cdot r_1 + r_1^2)}{2r_2}. \quad (6)$$

Представимо отримане рівняння (6) у наступному вигляді:

$$\Delta h = \frac{1}{2} r_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r_1^2}{r_2} + 2r_1 - \frac{\sqrt{2}}{r_2} \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot \cos \varphi - \frac{\sqrt{2}}{r_2} \cdot r_1^2 \cdot \cos \varphi. \quad (7)$$

Підставимо значення товщини зношеного шару в початкове рівняння (3) для визначення зношеної елементарної ділянки отвору:

$$dS_i = \frac{1}{2} r_2^2 \cdot d\varphi + \frac{1}{2} r_1^2 \cdot d\varphi + 2r_1 r_2 \cdot d\varphi - \sqrt{2} r_2 r_1 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi - \sqrt{2} r_1^2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Звідки:

$$\int_0^S dS_i = \frac{1}{2} r_2^2 \cdot \int_{-\varphi_k}^0 d\varphi + \frac{1}{2} r_1^2 \cdot \int_{-\varphi_k}^0 d\varphi + 2r_1 r_2 \cdot \int_{-\varphi_k}^0 d\varphi - \sqrt{2} r_2 r_1 \cdot \int_{-\varphi_k}^0 \cos \varphi d\varphi - \sqrt{2} r_1^2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi. \quad (8)$$

де  $\varphi_k$  - кінцеве значення кута повороту радіуса до точки К (рис. 2), яка сумісна в пересіченні кіл.

Необхідність у визначенні кута  $\varphi_k$  виникає для кінцевого положення радіуса при розрахунку площі зношення.

В наслідок того, що точка К є сумісною для обох кіл маємо наступні рівності:

$$\begin{cases} x_1 = x_2; \\ y_1 = y_2. \end{cases} \quad (9)$$

Виходячи із системи рівнянь (1) і (2) і підставляючи значення координат в (9) з врахуванням, що у даному випадку  $\varphi_2 = \varphi_k$  запишемо:

$$\begin{cases} x_{O1} - r_1 \cdot \cos \varphi_1 = x_{O2} - r_2 \cdot \cos \varphi_k; \\ r_1 \cdot \sin \varphi_1 = r_2 \cdot \sin \varphi_k. \end{cases} \quad (10)$$

Враховуючи, що  $x_{O1} = \sqrt{2}r_1$  а  $x_{O2} = \sqrt{2}r_2$ , маємо:

$$\begin{cases} \sqrt{2}r_1 - r_1 \cdot \cos \varphi_1 = \sqrt{2}r_2 - r_2 \cdot \cos \varphi_k; \\ r_1 \cdot \sin \varphi_1 = r_2 \cdot \sin \varphi_k. \end{cases} \quad (11)$$

З другого рівняння системи (11) визначаємо кут  $\varphi_1$ :

$$\sin \varphi_1 = \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_\kappa}{r_1}.$$

Звідси 
$$\varphi_1 = \arcsin \left[ \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_\kappa}{r_1} \right].$$

Підставляючи значення кута  $\varphi_1$  в перше рівняння системи (11) в розгорнутому вигляді запишемо:

$$\sqrt{2}r_1 - r_1 \cdot \cos \left[ \arcsin \left( \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_\kappa}{r_1} \right) \right] = \sqrt{2}r_2 - r_2 \cdot \cos \varphi_\kappa. \quad (12)$$

Вирішуючи зворотну тригонометричну функцію маємо:

$$\arcsin \left( \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_\kappa}{r_1} \right) = \arccos \sqrt{1 - \left( \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_\kappa}{r_1} \right)^2}.$$

Враховуючи, що:

$$\cos \left[ \arccos \sqrt{1 - \left( \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_\kappa}{r_1} \right)^2} \right] = \sqrt{1 - \left( \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_\kappa}{r_1} \right)^2}.$$

Повертаючись до рівняння (12) і підставляючи значення зворотної функції маємо:

$$\sqrt{2}r_1 - r_1 \sqrt{1 - \left( \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_\kappa}{r_1} \right)^2} = \sqrt{2}r_2 - r_2 \cdot \cos \varphi_\kappa.$$

Виконуємо наступні алгебраїчні перетворення :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}r_1 - \sqrt{2}r_2 + r_2 \cdot \cos \varphi_\kappa &= r_1 \sqrt{1 - \left( \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_\kappa}{r_1} \right)^2}, \\ \left( \sqrt{2}(r_1 - r_2) + r_2 \cdot \cos \varphi_\kappa \right)^2 &= \left( r_1 \sqrt{1 - \left( \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_\kappa}{r_1} \right)^2} \right)^2, \\ 2 \cdot (r_1 - r_2)^2 + 2\sqrt{2}(r_1 - r_2) \cdot r_2 \cdot \cos \varphi_\kappa + r_2^2 \cdot \cos^2 \varphi_\kappa &= \\ = r_1^2 \cdot \left( 1 - \left( \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_\kappa}{r_1} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Вирішення отриманого трансцендентного рівняння відносно невідомого кута  $\varphi_K$  проведено за допомогою пакету прикладної обчислювальної програми MathCAD. При заданих початкових умовах  $r_1 = 0,1$  мм; та  $r_2 = 0,11$  мм визначено кінцеве значення кута повороту  $\varphi_K$  радіуса до точки К, яка є сумісна в пересіченні кіл. Результат проведених розрахунків графічно представлено на рис. 4, з якого видно, що кут  $\varphi_K \approx -42,4^\circ$ .

Гранична величина кута повороту  $\varphi_K$  радіуса  $r_2$  однозначно визначає положення точки К. Однак доцільно зауважити, що встановлення площі зношування по цій точці пересічення кіл вносить деяку похибку у дійсну величину площі зношування. Випадає з розрахунку невелика крайова ділянка площі зношення, що знаходиться за межами кіл між дугами профілів від точки К до верхньої зовнішньої робочої поверхні решета. Для компенсації цієї незначної похибки і враховуючи відносну складність визначення кута

$\varphi_K$  для практичних цілей з достатньою точністю встановлення площі зношування можна прийняти за кінцеве положення зношеного профілю точку дотику, якій відповідає

$$\text{кут } \varphi = \varphi_K = -\frac{\pi}{4}.$$

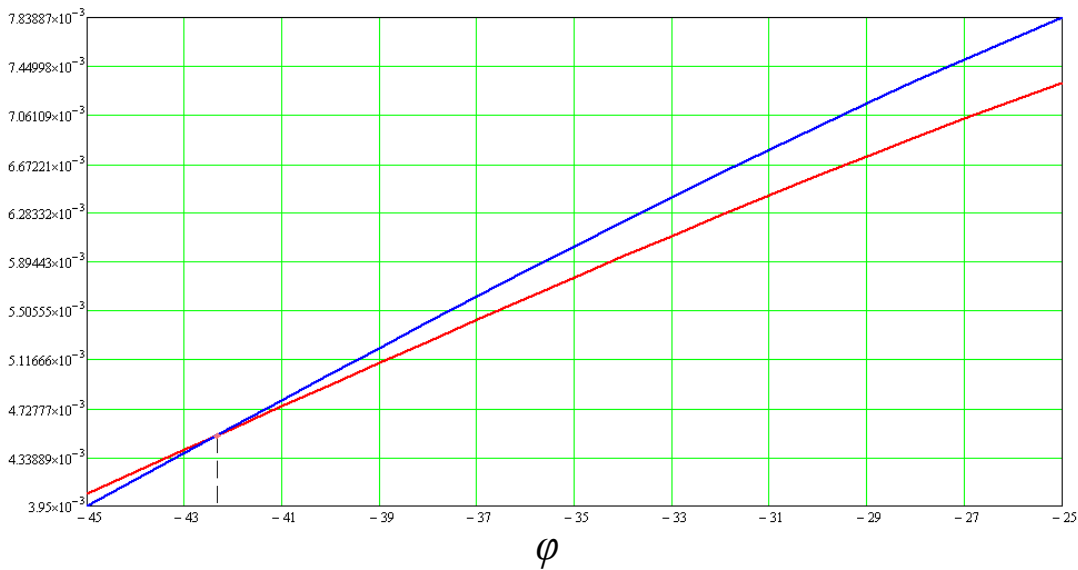


Рисунок 4. Визначення положення кута  $\varphi_K : - \left[ r_1^2 \cdot \left( 1 - \left( \frac{r_2 \cdot \sin \varphi_K}{r_1} \right)^2 \right) \right];$   
 $- 2 \cdot (r_1 - r_2)^2 + 2\sqrt{2} (r_1 - r_2) \cdot r_2 \cdot \cos \varphi_K + r_2^2 \cdot \cos^2 \varphi_K$ .

### Висновки

1. Кутова форма границь отвору сепаруючого решета обумовлює нерівномірність його зношування в процесі експлуатації з утворенням гладких криволінійних профілів.
2. Найбільша швидкість зношування профілей отворів спостерігається на початку їх роботи з поступовим її зниженням при прямуванні профілей до форми природного зношування.



### Література

1. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики: Учеб. пособие для вузов: Т. 1: Статика и кинематика / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. — М.: Наука, 1982. — 352 с.
2. Решетов Д.Н. Роботоспособность и надежность деталей машин. М.: Высшая школа, 1974. — 206 с.
3. Шульц В.В. Форма естественного износа деталей машин и инструмента. — Л.: Машиностроение, 1990. — 208 с.

### Summary

**Boiko A., Morozovska Z.** Mathematical modeling of holes elementary area of serial sieve

*Mathematical description over of process change form of type holes of separation sieve is brought in this article. It is suggested to estimate the size a loss to the area of body locate up between two contiguous of profiles hole. Coming from equality of sizes areas wear for the identical intervals of operating time, slow-motion character of moving of types is set.*

**Key words:** separation sieve, accumulation of wear, holes form, natural wear.

### References

1. Loytsansku L.H. Course of theoretical mechanics : Studies. manual for the institutes of higher : Т. 1: Statics and kinematics / L.H. Loytsansku, A.I. Lure. — М.: Science, 1982. — 352 p.
2. Reshetov D.N. Efficiency and reliability of details of machines / D.N. Reshetov. — М.: Higher school, 1974. - 206 p.
3. Shults V.V. Form of natural wear of details of machines and instrument / V.V. Shults. — L.: Engineer, 1990. - 208 p.